Lächerliche und erstaunliche Weisheiten aus dem großen und voller Schönheit strahlenden Gebiete der Theorie der analytischen Funktionen, der sogenannten FUNKTIONENTHEORIE

Matheseminare Bennauerstraße und Römerstraße,
Dr. Demel-Team
&
Trappaschmidti

Inhaltsverzeichnis

I. Teil

Die Theorie der holomorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Geschichtliche Einfürung

Die Einführung der komplexen Größen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Größen operationen ausgedrückte Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Größen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Größen, auf welche sie sich beziehen, komplexe Werte gibt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit henvor.

BERHARD RIEMANN, 1851

Riemann (1826 - 1866) ist ein Mann der glänzenden Intuition. Durch seine umfassende Genialität überragt er alle seine Zeitgenossen. Wo sein Interesse geweckt ist, beginnt er neu, ohne sich durch Tradition beirren zu lassen und ohne einen Zwang der Systematik anzuerkennen.
Weiestraß (1815 - 1897) ist in erster Linie Logiker, er geht langsam, systematisch, schrittweise vor. Wo er arbeitet, erstrebt er die abschließende Form.

FELIX KLEIN (1849 - 1925)

Die Entwicklung der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen vollzog sich auf sehr verschlungenen Wegen, im Gegensatz zu der heute vorliegenden äußerst eleganten Theorie, die zum Schönsten und ästhetisch Vollkommensten gehört, was die Mathematik hervorgebracht hat. Diese Theorie reicht in alle Gebiete der Mathematik und Physik hinein. Die Formulierung der modernen Quantentheorie basiert auf dem Begriff der komplexen Zahl.
Die komplexen Zahlen wurden von dem italienischen Mathematiker BOMBIELLI Mitte des 16. Jahrhunderts ersonnen, um Gleichungen dritten Grades zu lösen. EULER (1707-1783) führte an Stelle von $\sqrt{-1}$ das Symbol i ein und entdeckte die Formel

$$\exp(x+iy)=\exp(x)(\cos(y)+i\sin(y)), \qquad x,y\in\mathbb{R},$$

die einen überraschenden und außerordentlich wichtigen Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion herstellte.

In seiner Dissertation aus dem Jahre 1799 gab GAUSS erstmalig einen (fast) vollständigen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dabei benötigte er die komplexen Zahlen als ein wesentliches Hilfsmittel. GAUSS beseitigte die Mystik, die die komplexen Zahlen $x + iy$ bis dahin umgab, und zeigte, daß man sie als Punkte (x, y) der (GAUSSschen) Zahlenebene interpretieren kann. Vieles spricht dafür, daß GAUSS bereits zu Beginn des 19. Jahrhunderts viele wichtige Eigenschaften komplexwertiger Funktionen kannte, insbesondere im Zusammenhang mit elliptischen Integralen. Allerdings hat er hierzu nichts veröffentlicht.

In seinem berühmten *Course d'analyse* behandelte CAUCHY im Jahre 1821 Potenzreihen und zeigte, daß jede derartige Reihe im Komplexen einen Konvergenzkreis besitzt. In einer fundamentalen Arbeit aus dem Jahre 1825 beschäftigte sich CAUCHY mit komplexen Kurvenintegralen und entdeckte deren Wegunabhängigkeit. In diesem Zusammenhang entwickelte er später den Residuenkalkül zur einfachen Berechnung scheinbar komplizierter Integrale.

Einen entscheidenen weiteren Schritt zum Aufbau einer Theorie komplexer Funktionen vollzog RIEMANN im Jahre 1851 in seiner Göttinger Dissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe.* Damit begründete er die sogenannte geometrische Funktionentheorie, die konforme Abbildungen benutzt und sich durch große Anschaulichkeit und ihre Nähe zur Physik auszeichnet.

Parallel zu RIEMANN entwickelte WEIERSTRASS einen streng analytischen Aufbau der Funktionentheorie auf der Basis von Potenzreihen. Im Mittelpunkt der Bemühungen von RIEMANN und WEIERSTRASS stand das Ringen um ein tieferes Verständnis der elliptischen und der allgemeineren ABELschen Integrale für algebraische Funktionen.[1] In diesem Zusammenhang verdankt man RIEMANN völlig neue Ideen, aus denen die moderne Topologie - die Mathematik des qualitativen Verhaltens - hervorging.

Im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts schufen FELIX KLEIN und HENRI POINCARÉ das mächtige Gebäude der automorphen Funktionen. Diese Funktionenklasse stellt eine weitreichende Verallgemeinerung der periodischen und

[1] siehe Kapitel 19

doppelt periodischen (elliptischen) Funktionen dar und steht im engen Zusammenhang mit ABELschen Integralen.[2]
Im Jahre 1907 bewiesen KOEBE und POINCARÉ unabhängig voneinander den berühmten Uniformisierungssatz, der den Höhepunkt der klassischen Funktionentheorie darstellt und die Struktur der RIEMANNschen Flächen völlig aufklärt. Um diesen Uniformisierungssatz hat POINCARÉ viele Jahre gerungen.
Der Uniformisierungssatz besagt:
(i) Zu jeder RIEMANNschen Fläche $\mathcal{R}$ gibt es eine surjektive konforme Abbildung $p : \mathbb{E} \to \mathcal{R}$. Diese Abbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus.
Genauer ist das eine universelle Überlagerung. Für die Überlagerungsfläche $\mathcal{B}$ kann man genau eine der folgenden drei Möglichkeiten wählen:
$\mathcal{B}$ ist gleich der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ ist gleich der RIEMANNschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ oder $\mathcal{B}$ ist gleich dem offenen Einheitskreis.
(ii) Genau alle meromorphen Funktionen auf der RIEMANNschen Fläche $\mathcal{R}$ ergeben sich, indem man die rationalen Funktionen auf $\mathcal{B}$ durch p auf $\mathcal{R}$ verpflanzt.
(iii) Ist $\mathcal{R}$ einfach zusammenhängend, dann stellt p einen Diffeomorphismus dar, d. h. $\mathcal{R}$ ist äquivalent zu $\mathcal{B}$.

Eine abgerundete Darstellung der klassischen Funktionentheorie gab erstmals der junge HERMANN WEYL mit seinem 1913 erschienenen Buch *Die Idee der* RIEMANN*schen Fläche*, das eine Perle der mathematischen Weltliteratur darstellt.

Wesentlich neue Impulse erhielt die Funktionentheorie mehrerer komplexer Variabler um 1950 durch die von den französischen Mathematikern JEAN LERAY und HENRI CARTAN geschaffene Garbentheorie.[3]

[2] siehe Kapitel 19
[3] vgl. „Mit Messer und Garbe“, „Garbentisch“, „Wir Garben nicht auf!“...

1 Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1 Die komplexen Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ läßt sich definieren als

$$\mathbb{C} := \{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Zur einfacheren Schreibweise vereinbart man $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} =: x + iy$. Mit dieser Konvention gelten für komplexe Zahlen $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ z_1^{-1} &= \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned}$$

Die **(komplexe) Konjugation** $\overline{z}$ wird definiert durch: $\overline{z} := \overline{x + iy} = x - iy$. Es gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ z\overline{z} = x^2 + y^2,$$
$$\mathfrak{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \mathfrak{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Absolutbetrag:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und } |\mathfrak{Re} z| \le |z| \text{ bzw. } |\mathfrak{Im} z| \le |z|$$

Der Betrag ist eine Norm:

$$\begin{aligned} |z| &\ge 0;\ \text{es ist } |z| = 0 \text{ genau für } z = 0 \\ |z_1 + z_2| &\le |z_1| + |z_2| \\ |z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

Polarkoordinaten:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w \cdot z = |w| \cdot |z|(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i\sin(\psi + \varphi))$$

Bemerkung. *Geometrisch gesehen* ist die Addition komplexer Zahlen durch einfache Vektoraddition zu beschreiben. Die Multiplikation stellt hingegen (wie aus der Schreibweise in Polarkoordinaten ersichtlich) eine Drehstreckung dar.

1.2 Topologie der Gaußschen Zahlenebene

Topologie ist die Theorie der Homoeomorphismen.

1.2.1 Aller Anfang ist offen

Umgebungen und solcherlei.
$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$ heißt **ε-Umgebung von z_0.**
Eine Menge U, die eine ε-Umgebung von z_0 enthält, nennt man **Umgebung von z_0.**
Wenn sich die Gelegenheit bietet, bezeichnet man solche Mengen mit U_{z_0}.

Tag der offenen Menge.
$U \subset \mathbb{C}$ heißt **offen,** wenn $\forall z \in U\, \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(z_0) \subset U$. Offene Mengen werden (im FISCHER-LIEB) auch **Bereiche** genannt.
$A \subset \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn $A^c = \{z \in \mathbb{C}\colon z \notin A\}$ offen ist.
R heißt **relativ-offen (in M),** wenn $R = U \cap M$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen.
R heißt **relativ-abgeschlossen (in M),** wenn $R = U \cap M$ mit $U \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen.

Bemerkung. In der Topologie wird umgekehrt der Begriff der Umgebung durch den der offenen Menge definiert. Eine Menge U nennt man dann **Umgebung eines Punktes z_0,** wenn es eine offene Menge $\tilde{U}$ gibt mit $z_0 \in \tilde{U} \subset U$.

1.2.2 Weitere Grundbegriffe:

Definition. $\overset{\circ}{M} := \bigcup\{U : U \subset M, U \text{ ist offen}\}$ nennt man den **offenen Kern** von M.
Die **abgeschlossene Hülle** von M ist definiert als $\overline{M} = \bigcap\{A : A \supset M, A \text{ ist abgeschlossen}\}$.

Definition. Man sagt, $N \subset M$ liege **dicht** in M, wenn $\overline{N} \supset M$. Ebenso behauptet man, N liege **diskret** in M, wenn $\forall z \in M\, \exists U_z : |N \cap U_z| < \infty$.

Definition. M heißt **Umgebung** von N, wenn $N \subset \overset{\circ}{M}$.
$\partial M = \overline{M} - \overset{\circ}{M}$ wird der **Rand** von M genannt.

1.3 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$. Wenn keine Mißverständnisse in den Startlöchern hocken, bezeichnet man auch das Bild $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer solchen Abbildung als Folge.

Hier ist nicht mehr als eine kleine Erinnerung nötig:
z_0 heißt **Limes** von (z_n), wenn in jeder Umgebung von z_0 fast alle z_n liegen.

(z_n) **konvergiert** gegen z_0, wenn der Limes z_0 existiert, man schreibt:
$z_n \to z_0$ oder $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Satz 1 (Cauchysches Konvergenzkriterium:)
(z_n) konvergiert genau dann, wenn $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt:
$a_n \pm b_n \to a \pm b,\ \ a_n b_n \to ab,\ \ \overline{a_n} \to \overline{a},\ \ |a_n| \to |a|$.

z heißt **Häufungspunkt** einer Folge (z_n), wenn in jeder ε-Umgebung von z unendlich viele z_n liegen.
Ist z der einzige Häufungspunkt einer beschränkten Folge, so ist z der Limes der Folge.

Der Begriff des Häufungspunktes ist auch in bezug auf eine Menge definiert:
Definition. z_0 heißt **Häufungspunkt** einer Menge M, wenn in jeder Umgebung von z_0 unendlich viele Punkte von M liegen.

Satz 2 (Bolzano-Weierstrass)**:**
Jede beschränkte unendliche Punktmenge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Korollar:
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

1.4 Kompaktheit

Definition. $K \subset \mathbb{C}$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält, die K überdeckt.

Satz 3 (Heine-Borel)**:**
K kompakt
$\Leftrightarrow$ K beschränkt und abgeschlossen.
$\Leftrightarrow$ Jede Folge in K hat Häufungspunkte in K.
$\Leftrightarrow$ Jede Folge in K hat konvergente Teilfolgen, deren Limites wieder in K liegen.
Dabei nennt man K **beschränkt**, wenn $\exists R > 0 \, \forall z \in K : |z| \leq R$.

Satz 4: $K_1 \supset K_2 \supset ..., \ 0 \neq K_i$ kompakt $\Rightarrow \bigcap K_n \neq \emptyset$.

2 Stetige Funktionen

Abbildungen $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$ heißen **Funktionen**.
Die **Hintereinanderausführung** wird definiert durch $(g \circ f)(z) := g(f(z))$, $f : M \to N, g : N \to \mathbb{C}$.

Definition.
$f : M \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in M$ **stetig**, wenn $\forall V_{f(z_0)}\ \exists U_{z_0} :\ f(U_{z_0} \cap M) \subset V_{f(z_0)}$.

Satz 1: f in z_0 **stetig** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ mit $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $|z - z_0| < \delta$.

Satz 2 (Folgenkriterium): Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} z_n)$ für alle alle Folgen (z_n), so ist f stetig.

Satz 3: f auf M stetig $\Leftrightarrow$ das Urbild jeder offenen Menge ist relativ offen in M.

Folgerungen:
f, g stetig $\Rightarrow f + g$ stetig, $f \cdot g$ stetig.
f stetig in z_0, $f(z_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{f}$ stetig in z_0.
$f = u + iv$ stetig $\Rightarrow u$ stetig und v stetig.
f stetig $\Rightarrow \overline{f}$ stetig.
f stetig $\Rightarrow |f|$ stetig.

Nochmals der Limes.
Definition. Ist f eine auf M definierte Funktion, so heißt $\zeta \in \mathbb{C}$ der **Limes von** $f(z)$ **für** $z \to z_0$ (Schrw.: $\zeta = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$), falls es eine auf $M \cup \{z_0\}$ stetige Funktion F mit $F(z_0) = \zeta$ und $F|_{(M-\{z_0\})} = f$ gibt.

Satz 4:
Ist f auf kompaktem K stetig, so ist $f(K)$ kompakt.

Bemerkung. Dieses ist für WRAAB der wichtigste Satz über Kompaktheit.

Satz 5:
Ist f auf kompaktem K stetig, so nehmen $\mathfrak{Re} f$, $\mathfrak{Im} f$ und $|f|$ auf K Maximum und Minimum an, sind also insbesondere beschränkt auf K.

Satz 6:
Ist f auf kompaktem K stetig und ohne Nullstellen, so gilt:
Es gibt eine positive Zahl δ, so daß $|f(z)| \geq \delta$ für alle $z \in K$.

3 Quo vadis? und andere topologische Unverschämtheiten

3.1 Was es mit dem Zusammenhang auf sich hat

Definition. Eine Abbildung $\gamma : [a, b] \to M \subset \mathbb{C}$ stetig heißt **Weg** in M. $\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, $\gamma(b)$ heißt Endpunkt von γ.

Definition. M heißt **wegweise zusammenhängend**, wenn es für je zwei Punkte aus M einen Weg gibt, der sie verbindet.

Definition. M heißt **zusammenhängend**, wenn M und $\emptyset$ die einzigen offen-abgeschlossenen Mengen in M sind.
Zusammenhängende offene Mengen in $\mathbb{C}$ heißen **Gebiete**.

Satz 1:
Ist f stetig und G (wegweise) zusammenhängend, dann ist $f(G)$ (wegweise) zusammenhängend.

Satz 2:
Wegweise zusammenhängende Mengen sind stets zusammenhängend.

3.2 Homotopie

Definition. Zwei stetige Abbildungen $f, g : M \to N$ heißen **homotop,** $f \simeq g$, wenn es eine Homotopie H, d.h. eine stetige Abbildung $H : M \times [0, 1] \to N$ mit $H(z, 0) = f(z)$ und $H(z, 1) = g(z)$ für alle $z \in M$, zwischen ihnen gibt.

Bemerkung. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Definition. Unter einem **Raum mit Basispunkt** versteht man ein Paar (X, x_0) aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x_0 \in X$.

Definition. Sei (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt. Sei $\Omega(X, x_0)$ die Menge aller bei x_0 beginnenden und endenden Wege in X („Schleifen an x_0") und $\Omega \times \Omega \to \Omega$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ die durch

$$\alpha\beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) \text{ für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

gegebene Verknüpfung. Dann ist auf der Menge $\Pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/ \simeq$ der Homotopieklassen (mit festem Anfangs- und Endpunkt x_0) durch $[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$ eine Verknüpfung wohldefiniert, die $\Pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe macht. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** des Raumes (X, x_0) mit Basispunkt.

Definition. Besteht die Fundamentalgruppe $\Pi_1(M, z)$ für alle $z \in M$ nur aus einem einzigen Element, so nennt man M **einfach zusammenhängend.** Dieses ist nach Wraab die beste Definition von „einfach zusammenhängend". *Anschaulich* ist eine einfach zusammenhängende Menge eine zusammenhängende Menge ohne „Löcher". Dementsprechend ist eine Menge *mit* Löchern „mehrfach zusammenhängend".

4 Holomorphe Funktionen

f heißt **komplex differenzierbar** in z_0, wenn
$\exists\Delta$: U $\to \mathbb{C}$ stetig in z_0: $\underline{f(z) = f(z_o) + (z - z_o)\Delta(z)}$.
$\Delta(z_o)$ heißt **Wert der Ableitung von f in** z_0

f heißt **holomorph** auf einer offenen Menge U, wenn f auf ganz U komplex differenzierbar ist.

Man sagt, f sei holomorph in z_0, wenn f in einer Umgebung von z_0 holomorph ist.

Satz 1 (Leichte Folgerungen):
f komplex diffbar in $z_0 \Rightarrow f$ stetig in z_0.

f und g komplex diffbar in $z_0 \Rightarrow$
$f + g, f - g, f \cdot g$ und (wenn $z_0 \neq 0$) $\frac{1}{f}$ komplex diffbar in z_0.

Man nennt f **biholomorph** zwischen den Bereichen U und V, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind.

Satz 2: f biholomorph $\Leftrightarrow$
f holomorph, bijektiv, f^{-1} stetig und auf ganz U ist $f'(z) \neq 0$ Dann ist $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Satz 3: Polynome und rationale Funktionen sind (auf ihrem Definitionsbereich) holomorph.

Aufgaben:

1. $f(z) = z\bar{z}$ ist nicht holomorph:
$x^2 + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (x - x_0)\Delta(z) \quad (x \to x_0, y = y_0 \text{ fest})$
$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 = \Delta(z)$
$\Rightarrow \Delta(z_0) = 2x_0$, aber:
$x_0^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 + (iy - iy_0)\Delta(z) \quad (y \to y_0, x = x_0 \text{ fest})$
$\Leftrightarrow i\frac{y^2 - y_0^2}{y - y_0} = i(y + y_0) = \Delta(z)$
$\Rightarrow \Delta(z_0) = -2iy_0$

2. $f(z) = \exp(x)(\sin(y) + i\cos(y)) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(z)$ ist holomorph:
$\exp'(0) = \lim \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \lim \frac{\exp(h) - 1}{h}$
$= \lim \frac{\sum_1^\infty \frac{h^i}{i}}{h} = \lim \sum_1^\infty \frac{h^{i-1}}{i} = 0^0 + 0^1 + 0^2 + 0^3 + ... = 0^0 = 1$ und
$\exp'(z) = \lim \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \lim \exp(z)(\frac{\exp(h) - 1}{h})$
$= \exp(z)\exp'(0) = \exp(z) \cdot 1 = \exp(z)$

3. $f(z) = \mathfrak{Re} z$ ist nirgends holomorph:
$x = x_0 + (x - x_0)\Delta(z) \quad (x \to x_0, y = y_0 \text{ fest})$
$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 = \Delta(z) = \Delta(z_0)$, aber:
$x_0 = x_0 + (iy - iy_0)\Delta(z) \quad (y \to y_0, x = x_0 \text{ fest})$
$\Leftrightarrow \frac{x_0 - x_0}{iy - iy_0} = 0 = \Delta(z) = \Delta(z_0)$

4. f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und reellwertig $\Rightarrow f$ konstant:
$\Delta(z) = \frac{f(x,y_0) - f(z_0)}{x - x_0} = i\frac{f(x_0,y) - f(z_0)}{y - y_0}$
Dabei ist der erste Bruch rein reell und der zweite rein imaginär (da f reellwertig ist), daher ist $\Delta(z) = 0$ und f konstant

5. $(f^{-1} \circ f)(z) = z \Rightarrow 1 = (f^{-1} \circ f))'(z) = f'(z) \cdot (f^{-1})'(f(z))$
$\Rightarrow (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad (\text{mit } w = f(z))$

5 Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

Geschichtliche Belehrung. 1) Baron AUGUSTIN LOUIS CAUCHY lebte in Paris, wo er 1789 geboren wurde und 1857 starb. In CAUCHYs Arbeiten findet sich neben eigenen Neuentdeckungen eine systematische Darstellung bereits bekannter Theoreme und Sätze, deren Definitionen und Beweise vor CAUCHY nicht exakt gefaßt worden waren. Zu seinen eigenen Neuentdeckungen gehören die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen, der CAUCHYsche Integralsatz sowie dessen Verallgemeinerung, der Residuensatz, die CAUCHYsche Integralformel und exakte Formulierung der Begriffe Grenzwert, Stetigkeit, Konvergenz und Ableitung.
2) BERNHARD RIEMANN, genannt RIEMÄNNSCHE, wurde 1826 geboren, studierte dann in Göttingen und Berlin bei EISENSTEIN, JACOBI und DIRICHLET. 1859 wurde RIEMÄNNSCHE Nachfolger DIRICHLETs in Göttingen. Von der Bekanntheit mehrerer bunter Hunde sind die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen, der RIEMANNsche Abbildungssatz, RIEMANNsche Flächen und das Hineinlocken topologischer Gesichtspunkte in die Analysis.

In der Schatzkiste aus Infini II findet man:
f heißt **reell differenzierbar** in z_0, wenn $\exists \Delta_1, \Delta_2 : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ stetig in z_0:

$$\underline{f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z).}$$

$\Delta_1(z_0) = f_x$ heißt **partielle Ableitung** von f nach x in z_0.
$\Delta_2(z_0) = f_y$ heißt **partielle Ableitung** von f nach y in z_0.

Bemerkung. Dies ist nur eine von vielen möglichen Definitionen. Eine andere Definition findet sich z. B. im FORSTER, *Analysis 2*:
f heißt **reell differenzierbar** in z_0, wenn $\exists A : U \to \mathbb{C}$ reell linear in z_0:

$$f(z_0 + \zeta) = f(z_0) + A(\zeta) + \varphi(\zeta),$$

wobei φ eine in der Nähe des Nullpunktes definierte komplexwertige Funktion mit $\lim\limits_{\zeta \to 0} \frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta|} = 0$ ist.
Anschaulich bedeutet die reelle Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige Existenz der Tangentialebene.
Die (reell) lineare Abbildung A kann durch eine Matrix beschrieben werden; diese Matrix heißt **Funktional** oder JACOBI-**Matrix.**

Bemerkung. Aus reeller Differenzierbarkeit folgt zwar die reelle *partielle* Differenzierbarkeit, nicht aber die Stetigkeit dieser partiellen Ableitungen.

Für $f = u + iv$ gilt:
$f_x = u_x + iv_x$ und $f_y = u_y + iv_y$, also auch: $\overline{f}_x = \overline{f_x}$ bzw. $\overline{f}_y = \overline{f_y}$ und zudem $(cf)_x = cf_x$ und $(cf)_y = cf_y$,
$(f_1 f_2)_x = f_{1x} f_{2x}$ und $(f_1 f_2)_y = f_{1y} f_{2y}$.

Satz 1: f reell differenzierbar in $z_0 \Leftrightarrow$
$\exists f_z, f_{\bar{z}} : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ stetig in z_0:

$$\underline{f(z) = f(z_0) + f_z(z)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z)(\bar{z} - \bar{z_0})}.$$

Dann ist $f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0))$ und $f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$.
Beweis:
(i): $x - x_0 = \frac{1}{2}(z - z_0 + \bar{z} - \bar{z}_0)$ und $y - y_0 = -\frac{i}{2}(z - z_0 - \bar{z} + \bar{z}_0)$ in $f(z) = f(z_o) + (x - x_o)\Delta_1(z) + (y - y_o)\Delta_2(z)$ einsetzen.
(ii): $z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$ und $\bar{z} - \bar{z}_0 = x - x_0 - i(y - y_0)$ in $f(z) = f(z_0) + f_z(z)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z)(\bar{z} - \bar{z}_0)$ einsetzen.

Der wichtige Satz 2: f **komplex diffbar in** $z_0 \Leftrightarrow$
f **reell diffbar in** z_0 **und** $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$.
Beweis:
Vergleich von $f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$ (komplexe Diffbarkeit)
und $f(z) = f(z_0) + f_z(z)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z)(\bar{z} - \bar{z_0})$ (reelle Diffbarkeit):
(i): Wähle $\Delta(z) = f_z(z) + \hat{\Delta}(z)$ mit $\hat{\Delta}(z) = \begin{cases} f_{\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
(ii): Wähle $f_z(z) = \Delta(z)$ und $f_{\bar{z}}(z) = 0$.
...der krönende Abschluß:
$0 = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + u_y)) \Leftrightarrow$
$0 = u_x - v_y$ und $0 = v_x + u_y$, also

$$\underline{u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x.}$$

Dieses sind die weltberühmten
Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.

Satz 2 besagt also die Äquvalenz von komplexer Differenzierbarkeit einerseits und reeller Differenzierbarkeit, verbunden mit der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen andrerseits.

Beispiele: $f(z) = \exp(z)$ und $f(z) = z^2+z$ genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
Es ist: $\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) = \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y)$, also:
$\frac{\partial \exp(x)\cos(y)}{\partial x} = \exp(x)\cos(y)$, $\frac{\partial \exp(x)\cos(y)}{\partial y} = -\exp(x)\sin(y)$,
$\frac{\partial \exp(x)\sin(y)}{\partial x} = \exp(x)\sin(y)$, $\frac{\partial \exp(x)\sin(y)}{\partial y} = \exp(x)\cos(y)$. □

Es ist: $z^2+z = (x+iy)^2+x+iy = x^2+2ixy-y^2+x+iy = x^2-y^2+x+i(2xy+y)$, also:
$\frac{\partial x^2-y^2+x}{\partial x} = 2x+1$, $\frac{\partial x^2-y^2+x}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial 2xy+y}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial 2xy+y}{\partial y} = 2x+1$. □

6 Reihen

6.1 Du bist an der Reihe!

Eine Folge der Form $(\sum_{n=0}^{n} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **unendliche Reihe.**

Man schreibt: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Konvergenz von Reihen. Man sagt, eine Reihe konvergiere, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

Das CAUCHY**sche Konvergenzkriterium** gibt es auch für Reihen: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \forall p \geq 1 : |c_{n+1} + c_{n+2} + ... + c_{n+p}| < \varepsilon$.

Bei konvergenten Reihen bilden die Glieder c_n eine Nullfolge.

Absolute Konvergenz. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt **absolut konvergent,** wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert. Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe heißt bedingt konvergent.
Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.

CAUCHY**-Produkt.**
Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ absolut konvergent sind, so ist auch das Produkt absolut konvergent, und zwar:
$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

LEIBNIZ**-Kriterium.** Wenn (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Majorantenkriterium.
Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ konvergent, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ und $|c_n| \leq \gamma_n$.
Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

Quotientenkriterium.
Es sei für fast alle n $|\frac{c_{n+1}}{c_n}| \leq \gamma < 1$, oder $\overline{\lim}|\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \lambda < 1$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent. Ist auf der anderen Seite für fast alle n $|\frac{c_{n+1}}{c_n}| \geq \gamma > 1$, oder $\overline{\lim}|\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \lambda > 1$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

Wurzelkriterium.
Es sei für fast alle n $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \gamma < 1$, oder $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda < 1$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent. Ist auf der anderen Seite für fast alle n $\sqrt[n]{|c_n|} \geq \gamma > 1$, oder $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda > 1$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

6.2 Reihen mit veränderlichen Gliedern

sind Reihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, die man in den zu allen Definitionsbereichen der Funktionen $f_n(z)$ gehörenden Punkten betrachtet.

Man sagt, die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ besitze den Konvergenzbereich B, wenn $\forall z_1 \in B$:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \forall p \geq 1$:

$$|f_{n+1}(z_1) + f_{n+2}(z_1) + ... + f_{n+p}(z_1)| < \varepsilon.$$

Gleichmäßige Konvergenz. Man sagt, die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig im Bereich B, wenn sich nach Wahl von $\varepsilon > 0$ eine (nur von ε und nicht von z abhängende) positive Zahl n_0 so angeben läßt, daß $\forall n \geq$

$n_0 \forall p \geq 1 \forall z \in B$:

$$|f_{n+1}(z_1) + f_{n+2}(z_1) + ... + f_{n+p}(z_1)| < \varepsilon.$$

Satz 1 (WEIERSTRASS**scher Konvergenzsatz):**
Sind die positiven Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n, ...$ so beschaffen, daß für *alle* z eines Teiles M des Konvergenzbereichs der Reihe $\sum f_n(z)$

$$\forall n: \quad |f_n(z)| \leq \gamma_n,$$

ist und daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$$

konvergiert, so ist $\sum f_n(z)$ in M *gleichmäßig* konvergent.

Satz 2:
Es sei $f_0(z), f_1(z), ...$ eine Folge von in einem Gebiet G holomorphen Funktionen. Wenn dann die Reihe $\sum f_n(z)$ auf jeder kompakten Teilmenge $G_1 \subset G$ gleichmäßig konvergiert, dann ist $\sum f_n(z)$ stetig in G.

..........und?

Heute schon geTEXt?

7 Elemantar-transzendente Funktionen

Gitarrenhändler, ich verachte euch!

Die Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion wird erkärt durch:

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}.$$

Trivialerweise gilt: $\exp'(z) = \exp(z)$ und $\exp(0) = 1$.
Daraus folgt, daß die Ableitung der Funktion $h(z) := \exp(z) \cdot \exp(-z)$ verschwindet, so daß h konstant ist. Da außerdem $h(0) = 1$ ist, gilt

Satz 1: $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Exponentialfunktion ist also nullstellenfrei in $\mathbb{C}$.

Satz 2: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen über eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f äquivalent:
i) $f(z) = a\exp(bz)$ in G mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$.
ii) $f'(z) = bf(z)$ in G.

Satz 3 (Additionstheorem der Exponentialfunktion): Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(w) \cdot \exp(z) = \exp(w + z)$$

Da nämlich $f(z) := \exp(z + w), z \in \mathbb{C}$, holomorph in ganz $\mathbb{C}$ ist mit $f' = f$, folgt aus Satz 2: $f(z) = a \cdot \exp(z)$. Es ist aber $a = f(0) = \exp(w)$.
Darüberhinaus folgt das Additionstheorem durch Berechnung des CAUCHY-Produktes. Das Additionstheorem macht die Potenzschreibweise „e^z“ statt „$\exp(z)$ “ sinnvoll.

Die EULERsche Formel.

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$$

Sie folgt sofort aus den Definitionen von Sinus und Cosinus:

$$\sin(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \text{ und } \cos(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

Korllar. $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz)+\exp(-iz))$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz)-\exp(-iz))$

Geschichtliche Belehrung. Leonhard Euler, genannt Leuler hat bei Werner Raab gottgleichen Status. Er wurde 1707 in Basel geboren und starb 1783 in St. Petersburg. Als Schüler Johann Bernoullis erwirbt Leuler 1723 die Würde eines Magister Artium; 1727 wechselt er an die St. Petersburger Akademie, wo er 1730 Professor für Physik und 1733 für Mathematik wird. 1741 bis 1766 lehrt Leuler in Berlin. Aus Frust erblindet er rechts 1735 und links 1766.
Aus Leulers Schatzkiste sollte man neben zahlentheoretischen Leckerbissen die Leulersche Konstante, die $\beta-$ und die $\gamma-$Funktion, die oben erwähnte Leulersche Identität und viel, viel mehr kennen und Reisenden aus Oslo erklären können.

Satz 4 (Trigeometrische Summenformel): Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(\frac{1}{2}z) \neq 0$ gilt: $\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos(\nu z) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(\frac{1}{2}z)}$.

Satz 5 (Additionstheoreme für Sinus und Cosinus): Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:
$\cos(w+z) = \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z)$ und
$\sin(w+z) = \sin(w)\cos(z) + \cos(w)\sin(z)$.

Aufgaben:

1. Beweis von Satz 4:

$$\frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(\frac{1}{2}z)} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})z}-e^{-i(n+\frac{1}{2})z}}{2(e^{\frac{1}{2}iz}-e^{-\frac{1}{2}iz})} = \frac{1}{2}e^{-inz}\cdot\frac{e^{i(2n+1)z}-1}{e^{iz}-1} \overset{\text{endl. geom. Reihe}}{=} \frac{1}{2}e^{-inz}\cdot\sum_{\nu=0}^{2n} e^{i\nu z} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu z} = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}(e^{i\nu z}+e^{-i\nu z}) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\cos(\nu z) \qquad \square$$

2. $\cos(3z) = 4\cos^3(z) - 3\cos(z)$:

$\cos(3z) = \cos(2z+z) = \cos(2z)\cos(z) - \sin(2z)\sin(z) = (\cos^2(z)-\sin^2(z))\cos(z)-(2\sin(z)\cos(z))\sin(z) = \cos^3(z)-3\sin^2(z)\cos(z) = \cos^3(z) - 3(1-\cos^2(z))\cos(z) = 4\cos^3(z) - 3\cos(z)$. $\square$

Die hyperbolischen Funktionen.
$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ nennt man Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus. Es gilt:
$\cosh(z) = \cos(iz)$ und $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ sowie
$(\cosh)'(z) = \sinh(z)$ und $(\sinh)'(z) = \cosh(z)$.

Die Reihenentwicklungen der hyperbolischen Funktionen.
$\sinh(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ und $\cosh(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$.

Satz 6 (Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen):
$\cosh(w+z) = \cosh(w)\cosh(z) + \sinh(w)\sinh(z)$ und
$\sinh(w+z) = \sinh(w)\cosh(z) + \cosh(w)\sinh(z)$.

Satz 7 (Epimorphiesatz für exp(z)): Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ aller komplexen Zahlen $\neq 0$.
Diese Abbildung ist surjektiv.

Satz 8: Es gilt Kern(exp)=$2\pi i\mathbb{Z}$. Die Exponentialfunktion hat daher die (Minimal-)Periode $2\pi i$.

Zurück zu Sinus und Cosinus:

Satz 9: $\sin(z)$ und $\cos(z)$ nehmen jeden Wert $c \in \mathbb{C}$ abzählbar unendlich oft an.

Satz 10 (Nullstellensatz): Die komplexen Nullstellen von $\sin(z)$ sind genau die reellen Zahlen $n\pi, n \in \mathbb{Z}$, und
die komplexen Nullstellen von $\sin(z)$ sind genau die reellen Zahlen $\frac{1}{2}\pi + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Satz 11 (Periodensatz): Sinus und Cosinus haben die (Minimal-)Periode 2π.

Cotangens- und Tangensfunktion.
Der Cotangens ist definiert durch: $\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$. Es gilt: $\cot'(z) = \frac{-1}{\sin^2(z)}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$ und $\cot(z) = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$.
Der Tangens ist definiert durch: $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash (\frac{1}{2}\pi + \pi\mathbb{Z})$. Es gilt: $\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash (\frac{1}{2}\pi + \pi\mathbb{Z})$ und $\tan(z) = i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$.

Satz 12: Die Funktionen $\cot(z)$ und $\tan(z)$ sind periodisch mit der (Minimal-)Periode π.
$\cot(w + z) = \frac{\cot(w)\cot(z)-1}{\cot(w)+\cot(z)}$

Moivresche Formel. Für jede komplexe Zahl $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ gilt:
$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

Einheitswurzeln. Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^n = 1$, nämlich:

$$\zeta_\nu := \zeta^\nu \ \ (\nu \in \{1, 2, ..., n\}) \text{ mit } \zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

Jede komplexe Zahl w mit $w^n = 1$ heißt n-te Einheitswurzel die Zahl $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ heißt primitive n-te Einheitswurzel.

Der Logarithmus. $b \in \mathbb{C}$ heißt Logarithmus von $a \in \mathbb{C}$, $b = \log a$, wenn gilt $e^b = a$. Jede von Null verschiedene komplexe Zahl $c = re^{i\varphi}$ hat also genau die abzählbar unendlich vielen Logarithmen $\log(r) + i\varphi + 2\pi i n$.
Eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ heißt eine Logarithmusfunktion in G, wenn $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Die Funktion

$$\log(z) := \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(z-1)^{\nu}}{\nu}$$

ist eine Logarithmusfunktion in $B_1(1)$.

8 Komplexe Integration

Wegintegrale.
Sei γ ein stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$ und f stetig auf $|\gamma|$ ($|\gamma| = \gamma(I)$ sei der kompakte Träger von γ).

Dann ist $\int\limits_{\gamma} f d\zeta := \int\limits_{\gamma} f(z)d\zeta := \int\limits_{a}^{b} f(\gamma) \cdot \gamma'(t)d\zeta$.

Satz 1:
Es sei $f_0(z), f_1(z), ...$ eine Folge von in einem Gebiet G holomorphen Funktionen. Wenn dann die Reihe $\sum f_n(z)$ auf jeder kompakten Teilmenge $G_1 \subset G$ gleichmäßig konvergiert, dann darf $\sum f_n(z)$ gliedweise integriert werden.

Die Integrale $\oint\limits_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta$.

Es gilt:

$$\oint\limits_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \begin{cases} 0 \text{ für } n \neq -1 \\ 2\pi i \text{ für } n = -1 \end{cases} .$$

Beweis.
Sei ∂B gegeben durch $\zeta(t) = c + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, d. h. $\zeta'(t) = ire^{it}$, also

$$\oint\limits_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \int\limits_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = r^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt =$$

$$\begin{cases} r^{n+1} \left(\left[\frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}\right]_0^{2\pi} \right) = r^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} e^{(n+1)2\pi i} - \frac{1}{n+1} e^0 \right) = 0 \quad \text{für } n \neq -1 \\ r^0 \cdot \int\limits_0^{2\pi} ie^0 dt = \int\limits_0^{2\pi} i dt = 2\pi i - 0 \cdot i = 2\pi i \quad \text{für } n = -1 \end{cases}$$

Das Integral $\oint\limits_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.

Es gilt (mit $B = B_r(c)$):

$$\oint\limits_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi i \text{ für } z \in B \\ 0 \text{ für } z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B} \end{cases}.$$

Beweis.

i) $z \in B$, also $|z - c| < |\zeta - c|$, also

$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) \cdot \frac{\zeta - z}{\zeta - c}} = \frac{1}{(\zeta - c) \cdot \frac{(\zeta - c) - (z - c)}{\zeta - c}} = \frac{1}{(\zeta - c)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - c}{\zeta - c}} = \frac{1}{(\zeta - c)} \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^{\nu}$, also

$\oint\limits_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \oint\limits_{\partial B} \frac{1}{(\zeta - c)} \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^{\nu} d\zeta = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (z - c)^{\nu} \oint\limits_{\partial B} (\zeta - c)^{-(\nu+1)} d\zeta = (z - c)^0 \cdot \oint\limits_{\partial B} \frac{1}{\zeta - c} d\zeta = \oint\limits_{\partial B} \frac{1}{\zeta - c} d\zeta = 2\pi i.$

ii) $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B}$, also $|\zeta - c| < |z - c|$, also

$\frac{1}{\zeta - c} = \frac{-1}{z - c} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - c}{z - c} \right)^{\nu}$, also

$\oint\limits_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \oint\limits_{\partial B} \frac{-1}{z - c} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - c}{z - c} \right)^{\nu} d\zeta = -\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(z - c)^{\nu+1}} \oint\limits_{\partial B} (\zeta - c)^{\nu} = 0.$

Als der wichtigste Satz in der Funktionentheorie gilt der CAUCHY**sche Integralsatz**, bzw. seine Verallgemeinerung, der **Residuensatz**.
("Integralsatz und Integralformel sind zusammen von solcher Tragweite, dass man ohne Übertreibung sagen kann, in diesen beiden Integralen liege die ganze jetzige Functionentheorie conzentrirt vor" (L. Kronecker 1894))

9 Cauchyscher Integralsatz

Cauchyscher Integralsatz (CIS)
Erste Form: Es sei die Funktion $f(z)$ in einem einfach-zusammenhängenden Gebiete G holomorph, und es seien z_0 und z_1 zwei (innere) Punkte von G. Dann hat das Integral

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

längs jedes von z_0 nach z_1 führenden und ganz in G verlaufenden Integrationsweges denselben Wert.
Aus dieser Form des Satzes folgt sofort, wenn man sich an $\int_{z_0}^{z_1} + \int_{z_1}^{z_2} = \int_{z_0}^{z_2}$ und $\int_{z_0}^{z_1} = -\int_{z_1}^{z_0}$ erinnert, die
Zweite Form: Ist $f(z)$ in dem einfach-zusammenhängenden Gebiete G holomorph, so ist

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

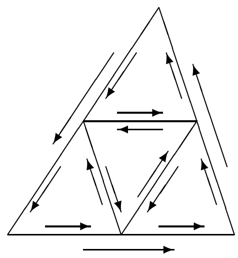
wenn γ einen beliebigen (nicht notwendigerweise doppelpunktfreien) geschlossenen, in G liegenden Weg bedeutet. Aus der zweiten Form des Satzes folgt sofort auch die erste. (Wie?)

Beweis: Es reicht wegen der Äquivalenz nur die zweite Form zu beweisen.
Der Beweis wird in drei Teile augesplittet:
1. γ ist ein Dreieck, 2. γ ist ein Polygon und 3. γ ist ein beliebiger Weg.
1. TEIL: Es sei γ ein in G liegendes Dreieck Δ.
Man zerlege Δ durch Parallelen zu den Seiten in vier kongruente Teildreiecke Δ', Δ'', Δ''' und Δ''''. Dann ist, wenn die Integrationswege stets im mathe-

matisch positiven Sinne durchlaufen werden:

$$\int_{\Delta} = \int_{\Delta'} + \int_{\Delta''} + \int_{\Delta'''} + \int_{\Delta''''} ;$$

denn indem über den Rand der vier Teildreiecke so integriert wird, wie in der mit viel Mühe erstellten Abbildung dargestellt, eliminiert sich der Einfluß der



inneren Linien von selbst. Unter den vier Integralen rechter Hand muß nun eines sein – sein Weg werde mit Δ_1 bezeichnet –, für das

$$|\int_{\Delta}| \leq 4|\int_{\Delta_1}|$$

ist, denn es kann nicht der Betrag jedes der Integrale kleiner als ein Viertel des Ganzen sein. Auf das Teildreieck Δ_1 kann man nun genau dieselbe Überlegung anwenden: es wird seinerseits wenigstens ein Teildreieck Δ_2 besitzen, für das

$$|\int_{\Delta_1}| \leq 4|\int_{\Delta_2}|,$$

also

$$|\int_{\Delta}| \leq 4^2|\int_{\Delta_2}|$$

ist. Man ahnt wie es weiter geht: Durch Fortführen dieses Verfahrens ergibt sich eine Folge von Dreiecken $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$, die alle untereinander ähnlich sind, deren jedes ganz im vorhergehenden liegt, von diesem ein Viertel ist, und so, daß für $n = 1, 2, ...$

$$|\int_{\Delta}| \leq 4^n|\int_{\Delta_n}| \text{ ist.}$$

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung gibt es einen und nur einen Punkt z_0, der allen Δ_n gemeinsam ist und also auch in G liegt.

So, bis jetzt wurden eher die Freunde der Geometrie erfreut, und es wird Zeit endlich mal die Holomorphie der Funktion auszunutzen: Es sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für alle z mit $0 < |z - z_0| < \delta$ gilt

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

oder

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z - z_0)$$

mit

$$|\eta| = |\eta(z)| < \varepsilon.$$

Man wähle nun n so groß, daß Δ_n ganz in der durch $|z - z_0| < \delta$ charakterisierten Umgebung von z_0 liegt, daß also für alle z in Δ_n und auf seinem Rand $|z - z_0| < \delta$ ist.
Dann ist

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = \int_{\Delta_n} f(z_0)dz - \int_{\Delta_n} z_0 f'(z_0)dz + \int_{\Delta_n} z f'(z_0)dz + \int_{\Delta_n} \eta \cdot (z - z_0)dz.$$

Da man konstante Faktoren vor das Integral ziehen darf und da, wie man sich überlege, gilt $\int_\gamma dz = 0$ und $\int_\gamma z dz = 0$, ist also

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = 0 + 0 + 0 + \int_{\Delta_n} \eta \cdot (z - z_0)dz$$

und folglich, unter Benutzung der Standardabschätzung für Intergrale

$$|\int_{\Delta_n} f(z)dz| < \varepsilon \cdot \tfrac{s_n}{2} \cdot s_n = \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot s_n^2,$$

wenn s_n den Umfang von Δ_n bezeichnet; denn $|z - z_0|$ ist als Abstand zweier Punkte des Dreiecks Δ_n höchstens $= s_n/2$, und die Länge des Weges ist $= s_n$, während $|\eta| < \varepsilon$ ist. Da nun, wenn s der Umfang des gegebenen Dreiecks Δ bezeichnet,

$$s_1 = \frac{s}{2}, s_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{s}{2^2}, ..., s_n = \frac{s}{2^n}$$

ist, so hat man schließlich

$$|\int_\Delta f(z)dz| \leq 4^n |\int_{\Delta_n} f(z)dz| \leq 4^n \cdot \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot \tfrac{s^2}{4^n} = \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot s^2.$$

Die Zahl rechts kann durch Wahl von ε beliebig klein gemacht werden, daher muß der Betrag des Integralwerts notwendig gleich Null sein.
2. TEIL: Es sei γ ein beliebiges geschlossenes in G liegendes Polygon, das sich auch selbst überschneiden darf.
Hier reicht wohl zu sagen, daß man für jedes Polygon eine Triangulierung finden kann, um hernach den Beweis mit Teil 1 zu führen.
3. TEIL: Es sei γ ein beliebiger geschlossener in G liegender Weg.
Diesen Teil des Beweises kann man wiederum auf den zweiten Teil zurückführen, mit der Argumentation, daß ein beliebiger Weg γ beliebig genau durch ein Sehnenpolygon approximiert werden kann, wonach das längs γ genommene Integrale nicht von 0 verschieden sein kann. $\square$
Historische Bemerkung: Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) formulierte seinen Satz für Rechteckränder, den Beweis führte er mit Methoden der Variationsrechnung, eine Beweismethode, die sich streng begründen läßt und heute in der Funktionentheorie vergessen ist.

Der CIS beruht auf dem **Integrallemma von** Goursat (Edouard Goursat, 1858 - 1936), dieser ist der CIS für Dreiecksränder. Goursat führte den Beweis über Rechteckränder; Alfred Pringsheim (1850 - 1941, Schwiegervater Thomas Manns) geht von Dreiecken aus, er sagt: "Der wahre Kern jenes Integralsatzes liegt in seiner Gültigkeit für irgend einen *Special*-Bereich *einfachster* Art, z.B. ein *Dreieck*... ". Pringsheim vereinfacht durch seinen Dreiecks-Beweis die Goursatsche Schlußweise und gibt ihr die elegante, bis heute finale Form. Mit der Dreicksvariante gilt der Integralsatz auch sofort für Sterngebiete, mit der Rechtecksvariante nicht.
Vor Goursat wurde der CIS mit dem **Satz von** Stokes bewiesen: In der reellen Analysis wird das Goursatsche Lemma gern als Spezialfall der Formel von Stokes aufgefaßt. Für Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ lautet sie:
Es seien p, q reell-wertige und stetig differenzierbare Funktionen in einem Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset D$

$$\int\limits_{\partial\Delta} (pdx + qdy) = \int\limits_{\Delta}\int \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy,$$

wobei $\int\int ...dxdy$ das Flächenintegral über Δ bezeichnet.
Hieraus ergibt sich sofort das Intergallemma, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß die Ableitung f' von f *stetig* in D ist: dann sind nämlich $u = \mathfrak{Re} f$ und $v = \mathfrak{Im} f$ stetig reell differnzierbar, so daß folgt:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial\Delta} f dz &= \int\limits_{\partial\Delta} (udx - vdy) + i \int\limits_{\partial\Delta} (vdx + udy) \\ &= -\int\limits_{\Delta}\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i \int\limits_{\Delta}\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy. \end{aligned}$$

In diesen Doppelintegralen sind beide Integranden aufrgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen =0; daher folgt: $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. □

Der CAUCHYsche Integralsatz kann noch verschärft werden: Der Satz bleibt gültig, wenn statt der Holomorphie in G Stetigkeit in G und Holomorphie in $G\backslash\{c\}$ vorausgesetzt wird.
Der Beweis beruht auf der Verschärfung des GOURSATschen Lemmas, wo c ein Eckpunkt des Dreiecks ist, über das zu integrieren ist. Man kann von diesem Dreieck sukzessive Dreicke "abspalten", auf denen f holomorph, ihr Integral also Null ist, so daß das verbleibende Dreieck mit dem Eckpunkt c beliebig klein gemacht werden kann, woraus mit der Standardabschätzung für Integrale die Behauptung folgt.

CAUCHYsche Integralformel (CIF) für Kreisscheiben.
Sei f holomorph im Bereich D, $B = B_r(c), r > 0, c \in \mathbb{C}, \overline{B} \subset D$.
Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in B$.
Beweis.
Sei $g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} \text{ für } \zeta\in D\backslash\{z\} \\ f'(z) \text{ für } \zeta = Z \end{cases}$ und $B' := B_s(c)$ mit $B \subset B' \subset D$.
Dann ist $g|_{B'}$ nach der Verschärfung des CIS integrabel und speziell gilt:
$0 = \int\limits_{\partial B} g(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - f(z)\int\limits_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - f(z)2\pi i.$

Wer will, kann auch noch ableiten:
Im Innern von B gilt, wie gerade erfahren, für alle z:
$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$
Also ist $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} =$
$\frac{1}{\Delta z} \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\Delta z} \cdot \left(\frac{1}{\zeta-(z+\Delta z)} - \frac{1}{\zeta-z} \right) d\zeta =$
$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\Delta z} \cdot \frac{(\zeta-z)-(\zeta-(z+\Delta z))}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}d\zeta =$
$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}d\zeta$ und

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man völlig analog die

Cauchysche Integralformeln für die Ableitungen:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Aus diesem grundlegenden Ergebnis folgt noch, daß der CIS unkehrbar ist:

Satz von GIACINTO MORERA **(1856 - 1909)** Ist $f(z)$ in einem Gebiet G stetig und ist für jeden dort liegenden geschlossenen Weg γ

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

so ist $f(z)$ in G holomorph.

Der später zu besprechende *Residuensatz* ist die Verallgemeinerung des CIS.

Aufgaben:

1. $\int\limits_{\gamma} |z|^2 \, dz$ mit $\gamma = [0,1] \cup [1, 1+i] \cup [1+i, i] \cup [i, 0]$

(i) $\gamma_1 : [0,1] \to [0,1], \quad t \mapsto t;\ \gamma_1'(t) = 1$

$\int\limits_{[0,1]} |z|^2 \, dz = \int\limits_0^1 |t|^2 \, dt = \int\limits_0^1 t \cdot \overline{t} \, dt = \int\limits_0^1 t \cdot t \, dt = \int\limits_0^1 t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

(ii) $\gamma_2 : [0,1] \to [1, 1+i], \quad t \mapsto 1 + i \cdot t;\ \gamma_2'(t) = i$

$\int\limits_{[1,1+i]} |z|^2 \, dz = \int\limits_0^1 |1+i\cdot t|^2 \cdot i \, dt = \int\limits_0^1 (1+i\cdot t)\cdot \overline{(1+i\cdot t)} \cdot i \, dt = i \cdot \int\limits_0^1 (1+i\cdot t)\cdot(1 - i \cdot t) \, dt = i \cdot \int\limits_0^1 1 + t^2 \, dt = i \cdot (t + \frac{t^3}{3})|_0^1 = i \cdot ((1 + \frac{1^3}{3}) - (0 + \frac{0^3}{3})) = i \cdot (\frac{4}{3} - 0) = \frac{4}{3} \cdot i$

(iii) $\gamma_3 : [0,1] \to [1+i, i], \quad t \mapsto 1 + i - t;\ \gamma_3'(t) = -1$

$\int\limits_{[1+i,i]} |z|^2 \, dz = \int\limits_0^1 |1 + i - t|^2 \cdot (-1) \, dt = -\int\limits_0^1 (1 + i - t) \cdot \overline{(1 + i - t)} \, dt = -\int\limits_0^1 (1 + i - t) \cdot (1 - i - t) \, dt = -\int\limits_0^1 1 - 2t + t^2 + 1 \, dt = -\int\limits_0^1 2 - 2t + t^2 \, dt = -(2t - t^2 + \frac{t^3}{3})|_0^1 = -((2 - 1^2 + \frac{1^3}{3}) - (0 - 0^2 + \frac{0^3}{3})) = -(\frac{4}{3} - 0) = -\frac{4}{3}$

(iv) $\gamma_4 : [0,1] \to [i,0], \quad t \mapsto i - i \cdot t; \gamma_4'(t) = -i$

$\int\limits_{[i,0]} |z|^2 \ dz = \int\limits_0^1 |i - i \cdot t|^2 \cdot (-i) \ dt = \int\limits_0^1 (i - i \cdot t) \cdot \overline{(i - i \cdot t)} \cdot (-i) \ dt =$
$i \cdot \int\limits_0^1 (i - i \cdot t) \cdot (i - i \cdot t) \ dt = i \cdot \int\limits_0^1 -1 + 2t - t^2 \ dt = i \cdot (-t + t^2 - \frac{t^3}{3})|_0^1 =$
$i \cdot ((-1 + 1^2 - \frac{1^3}{3}) - (0 + 0^2 - \frac{0^3}{3})) = i \cdot (-\frac{1}{3} - 0) = -\frac{1}{3} \cdot i$

So, jetzt ham wir's:

$\int\limits_\gamma |z|^2 \ dz = \int\limits_{[0,1]} |z|^2 \ dz + \int\limits_{[1,1+i]} |z|^2 \ dz + \int\limits_{[1+i,i]} |z|^2 \ dz + \int\limits_{[i,0]} |z|^2 \ dz = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot i -$
$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot i = -1 + i.$

2) $\int\limits_{\partial B_i(1)} \frac{dz}{1+z^2}$:

Sei $\tilde{f}(z) := \frac{1}{z+i}$ ($\frac{1}{z+i}$ ist holomorph in $B_i(1)$). Dann ist

$\int\limits_{\partial B_i(1)} \frac{1}{z^2+1} \ dz = \int\limits_{\partial B_i(1)} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} \ dz \overset{CIF}{=} 2\pi i \cdot \tilde{f}(i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$

3) $\int\limits_{\partial B_0(2)} \frac{1}{z^2+1} \ dz = \int\limits_{\partial B_0(2)} \frac{1}{(z+i)(z-i)} \ dz = \int\limits_{\partial B_0(2)} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \ dz =$
$\frac{1}{2i} \cdot \left(\int\limits_{\partial B_0(2)} \frac{1}{z-i} \ dz - \int\limits_{\partial B_0(2)} \frac{1}{z+i} \ dz \right) \overset{CIF}{=} \pi - \pi = 0.$

10 Potenzreihen

Eine Reihe der Form
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
heißt (formale) **Potenzreihe** mit Mittelpunkt z_0 und Koeffizenten a_n.

Satz 1 (Konvergenzsatz für Potenzreihen): Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe, die nicht überall, aber auch nicht nirgens (d. h. in keinem von z_0 verschiedenem Punkt) konvergiert, so gibt es eine positive Zahl R derart, daß die Reihe in allen Punkten der offenen Kreisscheibe $|z-z_0| < R$ absolut konvergiert, in allen Punkten z mit $|z-z_0| > R$ jedoch divergiert. In den Randpunkten kann sie konvergieren oder auch divergieren.
Die Kreisscheibe $|z-z_0| \leq R$ nennt man daher kurz die **Konvergenzkreisscheibe,** ihren Radius R den **Konvergenzradius.** Was auf ihrem Rand geschieht, wollt ihr wissen? Nun, mal so, mal so.
Beweis. Sei o. B. d. A $z_0 = 0$. Es sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für z_1, und es sei $|z| < |z_1|$. $(a_n z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Nullfolge und insbesondere beschränkt, d. h. $\exists M \in \mathbb{R}^+ \ : |a_n z_1^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt: $|a_n z^n| \leq M(\frac{|z|}{|z_1|})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ daher absolut konvergent.
Die entsprechende Aussage über die Divergenz läßt sich ganz ähnlich zeigen. Ein Beispiel für eine Potenzreihe, die für alle z mit $|z| < 1$ konvergiert, für alle z mit $|z| = 1$ *mit Ausnahme von* $z = 1$ aber divergiert ist (mal wieder) die geometrische Reihe.

Satz 2 (Formel von CAUCHY-HADAMARD): Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hat den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$.
Zu unserem großen Glück läßt sich das alles sehr leicht und im praktischen Doppelpack mit dem Wurzelkriterium beweisen:
i) $0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < \infty$:
Für jedes feste $z \neq z_0$ ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$, so daß die

Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergiert, falls $|z - z_0| < \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$, und divergiert, falls $|z - z_0| > \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$
ii) $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$:
Vollkommen analog folgt absolute Konvergenz auf ganz $\mathbb{C}$.
iii) $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$:
Für jedes feste $z \neq z_0$ ist Divergenz das ganze Leben.
Remmert bietet noch ein

Quotientenkriterium an:
Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe Konvergenzradius R; es sei $a_n \neq 0$ für alle n. Dann gilt:

$$\underline{\lim}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \overline{\lim}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|};$$

speziell $R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls der Limes existiert.

Mir fällt noch ein, daß

Satz 3: eine in jedem zum Konvergenzkreis konzentrischen kleineren Kreis gleichmäßig konvergiert.
Das Beispiel $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ zeigt, daß man aber nicht allzusehr darauf hoffen sollte, im gesamten Inneren auf gleichmäßige Konvergenz zu treffen.

Satz 4:
Die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist in $z = 0$ stetig.

10.1 Der Identitätssatz.

Satz 5 (Identitätssatz für Potenzreihen): Sind die beiden Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ beide für $|z| < \varrho$ konvergent und haben sie für alle diese z dieselbe Summe, so sind die beiden Reihen identisch, d. h. es ist $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

10.2 Differentation von Potenzreihen

Satz 6: Die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ läßt sich auch um jeden anderen in Innern des Konvergenzkreises gelegenen Punkt z_1 als Mittelpunkt in eine Potenzreihe entwickeln. Ist also $|z_1| < R$, so gibt es genau eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k$$

mit positivem Konvergenzradius R_1, die in den den beiden Konvergenzkreisen gemeinsamen Punkten ebenfalls die Summe $f(z)$ hat. Und zwar ist

$$b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} z_1^n,$$

und der Radius beträgt mindestens $R - |z_1|$.
Beweis. Es ist:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [z_1 + (z - z_1)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} (z - z_1)^k \right].$$

Durch Umordnen nach Potenzen von $(z - z_1)$ folgt die Behauptung.

Korollar. Wegen diesem Satz und wegen Satz 6 ist die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ an jeder (inneren) Stelle ihres Konvergenzkreises stetig.

Satz 7: Die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist an jeder (inneren) Stelle ihres Konvergenzkreises differenzierbar, und die dortige Ableitung kann durch gliedweise Differentation gewonnen werden, d. h. es ist

$$f'(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_1^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_1^{n-1}.$$

Beweis: Nach Satz 8 ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n$, also $\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n (z - z_1)^{n-1}$, also $\lim\limits_{z \to z_1} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = b_1 \overset{Satz\ 8}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} z_1^n$.

Genauso läßt sich zeigen, daß die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ unendlich oft differenzierbar und also holomoroph im Innern ihrer Konvergenzkreisscheibe ist.

Satz 8:
Eine Potenzreihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius r stellt im Innern des Konvergenzkreises eine holomorphe Funktion dar; die Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe, und diese abgeleiteten Potenzreihen haben denselben Konvergenzradius wie die ursprünglich gegebene. Es ist

$$f^{(k)}(z) = k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k}(z-z_0)^n.$$

CAUCHY**sche Abschätzungsformel.**
Speziell ist (mit $0 < \varrho < r$):
$f^{(k)}(z_0) = k! a_k$ und $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta$.
Daraus folgt die CAUCHYsche Abschätzungsformel:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \frac{M}{\varrho^{n+1}} = \frac{M}{\varrho^n},$$

wobei M das Maximum von $|f(z)|$ auf $|z - z_0| = \varrho$ bedeuten soll.

Ein mehr als populäres Beispiel einer Potenzreihe ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, die im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe $B_1(0)$ konvergiert und dort den Wert $\frac{1}{1-z}$ hat. Gleich lernen wir auch so prominente Potenzreihen wie exp, sin und cos kennen[4], also aufgepaßt!

[4]Die Binomische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n$ mit $\sigma \in \mathbb{C}$, $\binom{\sigma}{0} := 1$ und $\binom{\sigma}{n+1} := \frac{\sigma - n}{n+1} \binom{\sigma}{n}$, also $\binom{\sigma}{n} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)}{n!}$ soll heute mal diskriminiert werden. Trotzdem konvergiert die Reihe für $\sigma \in \mathbb{N}$; dann gilt: $(1+z)^\sigma = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n$.
Ansonsten hat sie den Konvergenzradius 1; das weiß so ziemlich jeder Quotientenkriteriumbenutzer.

11 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

Analytizität.
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt im Kreis $B = B_r(c) \subset D$ **um** z_0 **in eine Potenzreihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ **entwickelbar,** wenn die Potenzreihe in B gegen $f|B$ konvergiert.
In diesem Fall (und wenn $r > 0$) heißt f **analytisch** in z_0.

Satz 1 (Analytizität $\Rightarrow$ Holomorphie):
Aus der Vertauschbarkeit von Summation und Differentiation für Potenzreihen (Satz 9.3.10) folgt, daß Analytizität Holomorphie impliziert. Schwierig ist aber die Frage, ob Holomorphie auch Analytizität impliziert.
Dank Dr. Smalls dickbäuchiger Vorlesung Infini II kennen wir jedoch bereits jetzt die Antwort. Versuchen wir uns zu entsinnen:
Es hat etwas mit Taylor zu tun.

Geschichtliche Belehrung. Brook Taylor wurde 1685 in Edmonton geboren, schrieb 1715 die *Methodus incrementorum directa et inversa*, in der die nach ihm benannte Taylorsche Reihe vorgestellt wird, und legte sich dann 1731 in London gemütlich ins Grab. Zunächst darf uns aber das Beispiel $f(z) = \exp(-z^{-2})$ als Fingerzeig dafür gelten, daß man nicht von bloßer Differenzierbarkeit (auch nicht von beliebig häufiger) auf Analytizität schließen darf. In bezug auf die Holomorphie gilt hingegen

Satz 2 (Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor):
Es sei $f(z)$ eine im Gebiet G holomorphe Funktion und z_0 ein innerer Punkt von G. Dann gibt es *genau eine* Potenzreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

die für eine Umgebung von z_0 konvergiert und dort die Funktion $f(z)$ darstellt. Dabei ist

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert midestens in dem größten Kreis um z_0 (mit Radius r), der nur Punkte von G umschließt (Der genaue Konvergenzkreis der Reihe ist der größte Kreis um z_0, in dem $f(z)$ noch überall als differenzierbare Funktion erklärt oder erklärbar ist.).
Beweis: Es sei z ein beliebiger Punkt von $B_r(z_0)$.

Wegen $|z-z_0| = \varrho < r$ kann man ϱ_1 so wählen, daß $\varrho < \varrho_1 < r$ ist. Es sei ζ ein beliebiger Punkt von $\partial B_{\varrho_1}(z_0)$. Dann ist $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z_0}} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

Wegen $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| = \frac{\varrho}{\varrho_1} < 1$ konvergiert die Reihe gleichmäßig, und nicht nur sie selbst, sondern auch:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Daher darf bei Integration längs $\partial B_{\varrho_1}(z_0)$ Integration und Summation vertauscht werden, und es gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \, d\zeta.$$

Nun kann man sogar zugeben, daß ein kleines $\frac{1}{2\pi i}$ hinzugeschummelt wurde, aber das ist nicht so schlimm, denn dessenungeachtet konvergiert die Reihe und nach der CIF gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \cdot (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Die Eindeutigkeit der Darstellung folgt aus dem

Satz 3 (Identitätssatz):
Haben die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

einen positiven Konvergenradius und stimmen ihre Summen für alle Punkte einer Umgebung von z_0 oder auch nur für unendlich viele (von z_0 und untereinander verschiedene) solcher Punkte mit einem Häufungspunkt in z_0 überein, so sind sie miteinander identisch (vgl. Satz 6.1.5).

Theorem 1:
Unschwer fügt man Satz 1 und Satz 2 aneinander zur Äquivalenz:

$$f \textbf{ holomorph } \Leftrightarrow f \textbf{ analytisch} \; .$$

12 Holomorphe Fortsetzung

Theorem 1:
In einem Gebiet G_1 sei eine holomorphe Funktion $f_1(z)$ gegeben, und es sei G_2 ein anderes Gebiet, das mit G_1 ein gewisses Teilgebiet G, aber auch nur dieses gemeinsam hat.
Wenn es dann eine in G_2 holomorphe Funktion $f_2(z)$ gibt, die in G mit $f_1(z)$ übereinstimmt, so kann es nur eine einzige geben.
$f_1(z)$ und $f_2(z)$ heißen holomorphe Fortsetzung voneinander; sie gelten als Teildarstellungen oder Elemente einer und derselben durch sie bestimmten und im Gesamtgebiet holomorphen Funktion $F(z)$.
Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Identitätssatz.

Beispiel. G_1 sei der Einheitskreis $|z| < 1$, G_2 der Kreis mit $\sqrt{2}$ um i, also der Kreis $|z - i| < \sqrt{2}$, beide haben ersichtlich ein Gebiet G gemeinsam. In G_1 sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ gegeben. Die einzige Funktion, die in G_2 holomorph ist und in G mit f_1 übereinstimmt, ist $f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$, denn diese Reihe konvergiert für $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1$, d. h. für $|z - i| < \sqrt{2}$.

Satz 1:
Wenn eine Funktion der reellen Veränderlichen x überhaupt ist Komplexe holomorph fortsetzbar ist, so ist dies auf nur eine einzige Art möglich.

Theorem 2 (Riemannscher Hebbarkeitssatz):
Ist $f(z)$ eine in einer Umgebung von z_0 eindeutige und, von z_0 selbst abgesehen, holomorphe Funktion, so kann diese dann und nur dann durch geeignete Erklärung ihres Wertes in z_0 zu einer in z_0 holomorphen Funktion gemacht werden, wenn sie in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist. Ist dies der Fall, so existiert $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, und $f(z)$ wird in z_0 holomorph, wenn $f(z_0)$ gleich diesem Grenzwert gesetzt wird.

Karl Weierstrass gründete die Funktionentheorie auf Potenzreihen. die hieraus definierten Funktionen werden aus ihren Elementen „analytisch fortgesetzt“, so daß schließlich das „vollständige analytische Gebilde“ entsteht.

Da auf dem Konvergenzkreis um z_0 der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

mindestens ein singulärer Punkt liegt, ist $f(z)$ nicht nach allen Richtungen fortsetzbar. Vielmehr bewirkt die holomorphe Fortsetzung die Einteilung aller Argumente in „reguläre“ (d. h. solche, in denen f holomorph ist) und singuläre Punkte; nur die ersteren können in das Innere eines neuen Konvergenzkreises einbezogen werden.

13 LAURENT-Reihen

Wenn eine Funktion f in irgendeinem Gebiet G holomorph ist und wenn ein Kreisring R mitsamt Rand in diesem Gebiet liegt, und wenn γ_1 den äußeren und γ_2 den inneren Rand des Kreisringes bezeichnet, dann gilt, wie man sich leicht klarmacht:

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Jedoch nicht nur das gilt. Wahr ist zudem:

Satz 1 (CAUCHYsche Integralformel für Kreisringe):
$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$

Beweis. Man betrachte die Funktion:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in G \backslash \{z\}, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases},$$

die holomorph in $G\backslash\{z\}$ und stetig in D, also holomorph in D ist. Es gilt nach obiger Bemerkung: $\int\limits_{\gamma_1} g(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} g(z)dz$.

Und: $\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta,$

also: $\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i = \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 0$, popalso: □

Theorem 1 (Der Satz von LAURENT):
Dieses Theorem wurde 1843 von PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813 - 1854) veröffentlicht. KARL WEIERSTRASS kannte diesen Satz allerdings bereits im Jahre 1841.

Eine in einem Kreisring mit den Radien r und s und dem Mittelpunkt z_M holomorphe Funktion f läßt sich immer so:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

darstellen. Dabei ist, mit $\gamma = \partial B_\varrho(z_M)$ und $r < \varrho < s$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Beweis. Unbeirrt von schlechtem Wetter gilt:

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} d\zeta$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$

wenn man die Abkürzungen: $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$ und

$a_{-n} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta$

akzeptiert, statt sie in den Sack zu stecken.
So, lieber Leser, Du ahnst wohl schon, was jetzt kommt: γ_1 und γ_2 werden in einen Topf geworfen und zu γ verkocht:
Immerhin sind die Integrale $\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$ und $\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta$ vom Wege unabhängig, sofern dieser konzentrisch zum Kreisring ist und im Innern des Kreisringes liegt.

Oder hat jemand etwas dagegen, wenn $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$???

14 LIOUVILLE und Gebietstreue

14.1 Das LIOUVILLEsche Prinzip

Theorem 1:
Eine nicht konstante ganze Funktion ist außerhalb jedes Kreises noch beliebig großer Werte fähig.
Beweis. Es ist zu zeigen, daß jede beschränkte ganze Funktion f konstant ist. Nehmen wir also wirklich mal an, es gäbe $M \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Ist nun $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Taylorentwicklung von f, so folgt aus der CAUCHYschen Abschätzungsformel $|a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n}$, daß (da ϱ beliebige Werte annehmen darf, kann und soll) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ notwendig $a_n = 0$ sein muß. Also wohnt f in Konstanz ($f(z) \equiv a_0$).

14.2 Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz 1:
Ist f ein nicht konstantes Polynom m-ten Grades und $G \in \mathbb{R}^+$, so gibt es auf jeden Fall eine solche positive Zahl R, für die aus $|z| > R$ notwendig $|f(z)| > G$ folgt.
Beweis. Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Mit $|z| = r$ gilt dann:

$$|f(z)| \geq r^n \left(a_n - \frac{|a_{n-1}|}{r} - \ldots - \frac{|a_0|}{r^n} \right),$$

so daß $|f(z)|$ bei hinreichend großem r größer als $\frac{1}{2}|a_n|r^n$ ist.

Satz 2 (Fundamentalsatz der Algebra):
Jedes nicht konstante Polynom f hat mindestens eine Nullstelle.
Beweis. Für ein nullstellenfreies f wäre auch $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ eine ganze und nicht konstante Funktion. Nach dem LIOUVILLEschen Prinzip gäbe es dann außerhalb *jedes Kreises* noch komplexe Zahlen z mit

$$|g(z)| > 1, \text{ also } |f(z)| < 1.$$

Dieses wird jedoch vom vorherigen Satz gründlich verhöhnt.

14.3 Der Satz von der Gebietstreue

Satz 3 (Der Satz von der Gebietstreue):
Ist f holomorph und nicht konstant auf einem Gebiet G, so ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.
Beweis. Nun, für stetige Abbildungen sind Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend (Zusammenhang ist eine topologische Invariante) und für in D holomorphe und nirgends in D lokal konstante Abbildungen $f : D \to \mathbb{C}$ sind die Bilder offener Mengen offen (Offenheitssatz).

Satz 4 (Maximumprinzip):
Eine nichtkonstante, auf einem Gebiet G holomorphe Funktion kann auf G kein Betragsmaximum haben.
Beweis. Der Satz von der Gebietstreue.

Satz 5 (Der Satz von CASORATI-WEIERSTRASS):
Ist z_0 eine wesentliche Singularität von $f : U \to \mathbb{C}$, und ist U_{z_0} eine beliebige Umgebubg von z_0, dann liegt $f(U_{z_0})$ dicht in $\mathbb{C}$. Der **Beweis** benutzt den folgenden Umstand:
Eine ganze transzendente Funktion kommt außerhalb jedes Kreises noch jedem Wert beliebig nahe:
$\forall c \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall R > 0\ \exists z \in \mathbb{C} : |z| > R\ \wedge\ |f(z) - c| < \varepsilon.$

Satz 6 (SCHWARZ**sches Spiegelungsprinzip):**
Es sei G ein Gebiet mit

$$z \in G \Rightarrow \overline{z} \in G$$

und

$$B := \{z \in G : \mathfrak{Im} z > 0\},\ B^* := \{z \in G : \mathfrak{Im} z < 0\},\ I := \{z \in G : \mathfrak{Im} z = 0\}.$$

Es sei f in $B \cup I$ stetig, auf I reelwertig und in B holomorph. Dann ist

$$\tilde{f} : G \to \mathbb{C},\ \ \tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) \text{ für } z \in B \cup I, \\ \overline{f(\overline{z})} \text{ für } z \in B^* \end{cases}$$

holomorph.
Beweis. Wegen $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ für $z \in B^*$ ist $\tilde{f}$ auf dem Spiegelgebiet B^* holomorph.
Wir betrachten nun eine in G gelegene Dreiecksfläche; wir zerlegen das Randintegral in

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

gemäß der Zerlegung des Dreiecks durch die reele Achse in einen oberen und einen unteren Bereich. Dann ist:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_1 \varepsilon} f(z)dz = 0,$$

wobei $\gamma_1 \varepsilon$ den Bereich berandet, den $\{z : \mathfrak{Im} z > \varepsilon\}$ von dem Dreieck abschneidet. Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen aus Stetigkeitsgründen, das zweite wegen des CAUCHYschen Integralsatzes

15 Der Residuensatz

Ist f holomorph in $D\backslash\{c\}$, und ist $\sum\limits_{\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurent-Entwicklung von f in einer punktierten Kreisscheibe um c, so gilt für jede in dieser punktierten Kreisscheibe liegende Kreislinie γ :

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

Von allen Laurent-Koeffizienten bleibt also bei Integration von f um c nur a_{-1} „wie ein Überbleibsel" übrig.

Definition: $\mathrm{Res}_c f = a_{-1}$ heißt das **Residuum von f im Punkte c.**
Jeder sieht ein:
Ist f holomorph in c, so gilt $\mathrm{Res}_c f = 0$.

Theorem 1 (Der Residuensatz):
Es sei f in einem Gebiet G eindeutig und holomorph und γ eindoppelpunktfreier geschlossener, ganz in G liegender Weg, in dessen Innengebiet nur endlich viele (isolierte) singuläre Stellen liegen. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)dz = \begin{cases} \text{der Summe der Residuen von } f(z) \text{ in den} \\ \text{von } \gamma \text{ umschlossenen singulären Stellen.} \end{cases}$$

Beweis. Höchst elementar einfach. □

Satz 1 (Der Argumentsatz):
Sein f meromorph in einem Gebiet G. Sei γ ein Zykel in G, der keine Nullstelle und keinen Pol von f trifft und der eine Teilmenge $A \subset G$ berandet. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

wobei N die Anzahl der Nullstellen und P die Anzahl der Pole (jeweils gemäß der Vielfachheit und Ordnung gezählt) von f in A bezeichnet.

Satz 2 (Satz von ROUCHÉ):
Sei γ ein Zykel in einem Gebiet G, der eine Teilmenge $A \subset G$ berandet, und seien f und g holomorph auf G mit $|g(z)| < |f(z)|$ für alle z auf γ. Dann haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen in A.

16 Biholomorphe Abbildungen

16.1 Was sind konforme Abbildungen?

Definition: Ein Weg γ heißt **glatt**, wenn er stetig differenzierbar ist mit $\gamma'(t) \neq 0$.

Definition: Der **orientierte Winkel** $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$ zweier von z_0 ausgehender Wege γ_1 und γ_2 ist definiert als der Winkel zwischen ihren Halbtangenten (Halbtangente in z_0 ist der Strahl $z_0 + \gamma'(0),\ s \geq 0$), d. h.

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg\Big(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\Big).$$

Definition: Eine reel differenzierbare Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **winkeltreu** im Punkt $c \in D$, wenn ihr Differential $Tf(c) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ winkeltreu ist;
f ist winkeltreu in D, wenn f in jedem Punkt von D winkeltreu ist.
Eine reel differenzierbare Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **orientierungstreu** im Punkt $c \in D$, wenn die Funktionaldeterminante $\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ in c positiv ist;
f heißt orientierungstreu in D, wenn f in jedem Punkt von D orientierungstreu ist.

Satz 1:
Folgende Aussagen über eine reel stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sind äquivelent:
(i) f ist holomorph in D, und es gilt $f'(z) \neq 0$ überall in D.
(ii) f ist winkeltreu und orientierungstreu in D.

Definition: Man nennt eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ eines Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ **lokal konform,** wenn sie glatte Wege in glatte Wege überführt (dann hat sie lokal eine stetig differenzierbare Umkehrung) und in jedem Punkt von G winkel- und orientierungstreu ist. Man nennt f **konform,** wenn lokal konform ist und G bijektiv auf $f(G)$ abbildet.

Satz 2:
Eine Abbildung f von Gebieten in $\mathbb{C}$ ist genau dann lokal konform, wenn f lokal biholomorph ist. f ist genau dann konform, wenn f biholomorph ist.

16.2 $\mathbb{C}$ und der Punkt ∞

Definition: Es sei $F : \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$, $F(z) = \begin{cases} 1/z \text{ für } z \neq \infty \\ 0 \text{ für } z = \infty \end{cases}$.
Sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt holomorph (bzw. meromorph), wenn f auf $U \backslash \{0\}$ und $f \circ F^{-1}$ auf $U \backslash \{\infty\}$ holomorph (bzw. meromorph) sind.

Definition: $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Satz 3:
Jede auf der ganzen Zahlenebene $\hat{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant.
Beweis. Ist $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist $|f|$ stetig und muß das Maximum annehmen, da $\hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist. Die Behauptung folgt aus dem Maximumsprinzip. □

Satz 4:
Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen.

16.3 Die Gruppe der linearen Transformationen

Die rationalen Funktionen $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ sind biholomorphe Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}}$ auf sich und heißen **(gebrochen) lineare Transformationen.**

Satz 5:
Die Menge aller linearen Transformationen bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe; man nennt diese Gruppe die **Gruppe der linearen Transformationen.**
Die Gruppe der linearen Transformationen ist gleich $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. **Beweis.** Ausrechnen.

Bemerkung. Man kann jeder komplexen $2 \times 2-$Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit nicht verschwindender Determinante die lineare Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ zuordnen; man erhält einen Homomorphismus der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ dieser Matrizen auf die Gruppe der linearen Transformationen mit Kern $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{C}^*$.

Satz 6:
$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ ist die Gruppe der ganzen linearen Transformationen.

Satz 7:
Zu zwei Tripeln (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) vorgegebener, paarweise verschiederner Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine lineare Transformation, die diese aufeinander abbildet.

Satz 8:
Lineare Transformationen führen Geraden und Kreislinien in Geraden oder Kreislinien über.

Satz 9:
Durch drei paarweise verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 geht genau eine Gerade oder Kreislinie.

Definition: Zwei Gebiete G_1 und G_2 heißen **konform äquivalent,** wenn es eine konforme Abbildung $f : G_1 \to G_2$ gibt.

Satz 10:
Das Gebiet $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ werde (mit Einschluß des Punktes ∞) von einer Kreislinie oder einer Geraden berandet. Dann gibt es eine lineare Transformation, die G auf die obere Halbebene abbildet. Insbesondere sind alle Gebiete konform äquivalent.
Beispiel. $T : z \mapsto i\frac{1-z}{1+z}$ bildet den Einheitskreis auf die obere Halbebene ab.

16.4 Das Schwarzsche Lemma

Satz 11 (Schwarzsches Lemma):
Sei $f : E \to E$ eine holomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe in sich

mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

$$|f'(0)| \leq 1 \text{ und } |f(z)| \leq |z| \; \forall z.$$

Tritt ferner an einer Stelle $z_0 \neq 0$ das Gleichheitszeichen ein (d. h. ist $|f(z_0)| = |z_0|$), oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f einfach eine Drehung, $f(z) = e^{i\varphi} \cdot z$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ und alle z.

Beweis. Es sei $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$. Dann ist $g(z) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^{i-1}$ holomorph und es gilt: $f(z) = z \cdot g(z)$. Die Produktregel ergibt $f'(0) = g(0)$. Für $|z| = r < 1$ gilt:
$|f(z)| = |z||g(z)| = r|g(z)| \leq 1$ nach Voraussetzung, also $|g(z)| \leq 1/r$ für $|z| = r$. Nach dem Maximumprinzip gilt das aber auch für alle z mit $|z| \leq r$. Indem wir $|z|$ gegen 1 gehen lassen, sehen wir, daß daraus $|g(z)| \leq 1$ für alle z folgt, also $|f(z)| \leq |z|$ und $f'(0) = g(0) \leq 1$.
Tritt das Gleichheitszeichen ein, so ist irgendwo $|g(z_0)| = 1$ und g nach dem Maximumprinzip daher konstant, also $g(z) = e^{i\varphi}$. $\square$

Satz 12:
Die Automorphismengruppe des Einheitskreises besteht aus allen linearen Transformationen der Form:

$$f(z) = \frac{az - b}{\overline{b}z - \overline{a}} \text{ mit } a\overline{a} - b\overline{b} = 1 \text{ oder, mit } z_0 = -b/a \text{ und } e^{i\varphi} = a/\overline{a}:$$

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \text{ mit } \varphi \in [0, 2\pi) \text{ und } z_0 \in \mathbb{E}.$$

Satz 13:
Die Automorphismen der oberen Halbebene sind genau die linearen Transformationen, die sich in der Form:

$$f(z) = \frac{az + b}{bz + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } ad - bc > 0$$

schreiben lassen.

16.5 Der Riemannsche Abbildungssatz

Theorem 1 (Riemannscher Abbildungssatz):
Man kann jedes einfach zusammenhängende Gebiet G der z-Ebene mit mindestens zwei Randpunkten (d. h. $\hat{\mathbb{C}}\backslash G$ enthält mindestens zwei Punkte) umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises der w-Ebene abbilden kann.
Man kann vorschreiben, daß in einem Punkt $z_0 \neq \infty$ in G die Bedingungen $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$ gelten sollen; dadurch ist f eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Insbesondere gibt es unter den einfach zusammenhängenden Gebieten bezüglich der Äquivalenzrelation der konformen Äquivalenz nur drei Klassen: $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$.

17 Der WEIERSTRASSsche Produktsatz

Geschichtliche Belehrung. KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS wurde 1815 geboren und starb 1897 in Berlin. WEIERSTRASS schuf seinen Konvergenzsatz, beschäftigte sich mit der „analytischen Fortsetzung“, und entdeckte den Produktsatz. Prunkstück seiner Errungenschaften ist aber seine Darstellung der Theorie der elliptischen Funktionen, deren Grundelement seine $\wp$-Funktion ist. Jede elliptische Funktion läßt sich als rationales Polynom von $\wp$ und $\wp'$ darstellen.

17.1 Vorgeplänkel

Satz 1:
Bedeutet $h(z)$ eine beliebige ganze Funktion, so ist $e^{h(z)}$ die allgemeinste ganze Funktion ohne Nullstellen.

Satz 2:
Ist $G_0(z)$ eine gegebene ganze Funktion, so ist, wenn $h(z)$ eine beliebige ganze Funktion bedeutet,

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot G_0(z)$$

die allgemeinste ganze Funktion, deren Nullstellen nach Lage und Ordnung mit denen von $G_0(z)$ übereinstimmen.

17.2 Der Satz selbst

Theorem 1:
Wird irgend eine, sich nirgens im Endlichen häufende Punktmenge vorgeschrieben und wird jedem ihrer Punkte eine bestimmte positive Zahl als Ordnung zugeordnet, **so gibt es stets eine ganze Funktion, die an den vorgeschriebenen Punkten Nullstellen von der vorgeschriebenen Ordnung besitzt und sonst von 0 verschieden ist.** Dieselbe läßt sich in Form eines Produktes aufstellen, aus dem die Lage und Ordnung der Nullstellen wieder abgelesen werden kann. Und ist $G_0(z)$ eine solche Funktion, so ist

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot G_0(z)$$

die allgemeinste den Bedingungen des Problems genügende Funktion, wenn hierin $h(z)$ eine beliebige ganze Funktion bedeutet.

17.3 Das Sinus-Produkt

17.3.1 Die logarithmische Ableitung

Es sei $f = \prod f_n$. Dann gilt, wie man sich zumindest im endlichen Fall leicht klarmacht:

$$\frac{f'}{f} = \frac{(\prod f_n)'}{\prod f_n} = \sum \frac{f_n'}{f_n}.$$

Außerdem gilt:

$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} \Leftrightarrow f'g - fg' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = c \Leftrightarrow f = c \cdot g.$

Wenn also die logarithmischen Ableitungen zweier Funktionen übereinstimmen, dann unterscheiden sich die beiden Funktionen nur durch einen konstanten Faktor.

17.3.2 $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Um das zu zeigen, nutzen wir zunächst das grade Gelernte schamlos aus:

(i) Wegen $\frac{z'}{z} = \frac{1}{z}$ und $\frac{\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)'}{1-\frac{z^2}{n^2}} = \frac{2z}{z^2-n^2}$ gilt:

$$\frac{\left(z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right)'}{z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z).$$

(ii) Es ist:

$$\frac{(\sin(\pi z))'}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z).$$

Aus (i) und (ii) folgt:

$$\sin(\pi z) = c \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Aus $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\pi z)^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z} = \lim\limits_{z\to 0}\pi\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\pi z)^{2k}}{(2k+1)!} = \pi\cdot\frac{(\pi z)}{1!} = \pi$ und $\lim\limits_{z\to 0}\frac{c\cdot z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} c\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = c\cdot 1 = c.$
ergibt sich:

$$c = \pi.$$

Die Überschrift[5] ist also nicht erlogen!

17.3.3 Was für den Sinus gut ist, kann für den Cosinus nicht schlecht sein

Wegen $\cos(\pi z)\cdot\sin(\pi z) = \frac{1}{2}\sin(2\pi z) = \frac{1}{2}2\pi z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(2z)^2}{n^2}\right) = \pi z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(2z)^2}{(2n)^2}\right)\left(1-\frac{(2z)^2}{(2n+1)^2}\right) = \sin(\pi z)\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(4z^2}{(2n+1)^2}\right)$ liegt nun auch die Produktentwicklung des Cosinus auf dem Tisch:

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

[5]Damit ist die kesse Behauptung: $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ gemeint.

18 Spezielle Funktionen

18.1 Die Zetafunktion

Definition. Die Funktion

$$\zeta(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^z},$$

die für $\mathfrak{Re}\,\mathfrak{z} \geq 1 + \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert, heißt RIEMANN**sche Zeta-Funktion.**

Satz 1:
$\zeta(z)$ ist über den Rand $\mathfrak{Re}\,\mathfrak{z} = 1$ der genannten Halbebene hinaus fortsetzbar und erweist sich als eine meromorphe Funktion mit dem einzigen Pol $z = 1$, zu dem der Hauptteil $\frac{1}{z-1}$ gehört, der also ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum $+1$ ist.

18.2 Die Gammafunktion

18.2.1 Definition der Gammafunktion

Berühmt geworden sind vor allem zwei Definitionen der Gammafunktion: die von EULER und die von GAUSS.

Definition (EULER): Für beliebige komplexe z mit $\mathfrak{Re}\,z > 0$ ist:

$$\gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

die (EULER**sche) Gammafunktion.**

Definition (GAUSS): Für alle $z \neq 0, -1, -2, -3, ...$ ist

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\cdot ... \cdot (z+n)}$$

die Gammafunktion.
Die soeben gezüchtete Verwirrung ist im Keim zu ersticken: es ist $\gamma(z) = \Gamma(z)$. Ihr werdet schon seh'n!

18.2.2 Elementare Sätze

Satz 2:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Beweis:
$\Gamma(z+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n+1)} = z \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \cdot \frac{n}{z+n+1} = z\Gamma(z).$

Satz 3:
Für $k \geq 0$ ist:

$$\Gamma(k+1) = k!.$$

Beweis: Es ist, wie gerade gezeigt, $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$, und es gilt:
$\Gamma(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!n^1}{1(1+1)(1+2)\cdot\ldots\cdot(1+n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

Satz 4:
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z} = 1.$$

Beweis: Aus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)\Gamma(z)} = 1 \quad \text{folgt nach Satz 4:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{\Gamma(z+n+1)} = 1.$$

Satz 6:
Für jedes nicht ganzzahlige z ist:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Beweis: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}{n!n^z} \cdot \frac{(1-z)(2-z)\cdot\ldots\cdot(n+1-z)}{n!n^{1-z}} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-z}{n} \cdot z(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) =$
$z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$

Satz 7:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = +\sqrt{\pi}.$$

Beweis: Das folgt mit $z = \frac{1}{2}$ sofort aus Satz 4, wenn man bedenkt, daß $\Gamma(\frac{1}{2})$ als positiv definiert ist.

Satz 8:
Es gilt:

$$\mathrm{Res}_{-n}\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!} \ \ (n = 0, 1, 2, ...).$$

Beweis: Es ist: $\mathrm{Res}_{-n}\Gamma = \lim\limits_{z \to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim\limits_{z \to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)} = \lim\limits_{z \to -n}\frac{\Gamma(1)}{(-n) \cdot (-n+1) \cdot \ldots \cdot (-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \ \ (n = 0, 1, 2, ...)$.

Satz 9:
Für $\mathfrak{Re}\mathfrak{z} > \mathfrak{o}$ gilt: $\gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \lim\limits_{n \to \infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} = \Gamma(z)$

II. Teil

Die Theorie der elliptischen Funktionen

19 Elliptische Funktionen

19.1 Einführendes

19.1.1 Für Übertreiber: ABELsche Integrale

Definition: Ist p ein Polynom zweiten Grades mit zwei verschiedenen Nullstellen (wie es sich also gehört), so nennt man das Integral

$$\int R(z, \sqrt{p(z)})dz$$

ein **Integral vom Kreistyp.**
Derartige Integrale lassen sich stets von sogenannten *Integrierhansis* durch Substitutionen lösen, bei denen trigeometrische Funktionen auftreten. Trigeometrische Funktionen sind periodisch.
Ist p ein Polynom dritten oder vierten Grades mit lauter verschiedenen Nullstellen, so heißt das obige Integral ein **elliptisches Integral.**
Wohltrainierte Integrierhansis können auch diese Integrale lösen, und zwar durch Substitutionen, bei denen elliptische, also doppelt periodische Funktionen benutzt werden.
Sollte p gar ein Polynom fünften oder sechsten Grades mit lauter verschiedenen Nullstellen sein, so schämen wir uns nicht, das in Rede stehende Integral ein **hyperelliptisches Integral** zu nennen.
Allergrößte Kühnheit treibt uns und vor uns schon so illustre Gestalten wie RIEMÄNNSCHE und WEIERSTRASS zu einer weiteren Verallgemeinerung:

Definition: Integrale der Form $\int R(z, w)dz$, wobei w eine algebraische Funktion bezeichnet (d. h. die (mehrdeutige) Funktion $w = w(z)$ genügt einer Gleichung $P(w, z) = 0$, wobei P ein Polynom beliebigen Grades ist), nennt man **ABELsche Integrale.** Solche Integrale wurden in allgemeiner Form von ABEL studiert.

19.1.2 Die Schöpfungsgeschichte

Elliptische Integrale wurden systematisch von LEGENDRE (1752 - 1829) und JACOBI (1804 - 1851) untersucht, wobei JACOBI die rasch konvergenten Theta-Funktionen benutzte und die trigeometrischen Sinus- und Cosinus-Funktionen zu den JACOBIschen Sinus- und Cosinus-Funktionen $w = \mathrm{sn} z$

und $w = \mathrm{cn}z$ verallgemeinerte.

Die Theorie der elliptischen Integrale wird jedoch erst dann durchsichtig, wenn man nicht diese Integrale, sondern die elliptischen Funktionen an die Spitze stellt. Der Weg wurde vom genialen, aber schreibfaulen KARL WEIERSTRASS in einer berühmten Vorlesung an der Berliner Universität im Jahre 1862 systematisch beschritten. Ganz allgemein war WEIERSTRASS ein großer Meister darin, sich die wunderbarsten mathematischen Phantastereien und Leckerbissen *ausschließlich* in seinen Vorlesungen aus der Nase ziehen zu lassen: Er war anscheinend außerordentlich schreibfaul.
Den Ausgangspunkt einer solchen Theorie der elliptischen Funktionen bildete dabei die von ihm eingeführte $\wp$-Funktion. Aus dieser Funktion und ihrer Ableitung kann man alle elliptischen Funktionen in einfacher Weise durch rationale Operationen aufbauen.

Die Grundgedanken sind folgende:

- Elliptische Integrale lassen sich mit Hilfe einer *universellen Substitution* integrieren, bei der man die WEIERSTRASSsche Funktion $\wp$ benutzt.

- Elliptische Integrale besitzen *lokale* Umkehrfunktionen. Analytische Fortsetztung dieser lokalen Umkehrfunktionen ergibt elliptische Funktionen auf der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$.

- Das *globale* Verhalten elliptischer Integrale wird von der Mehrdeutigkeit der Funktion $\sqrt{p(z)}$ im Integranden beeinflußt. Damit das Intgral $\int R(z, \sqrt{p(z)})dz$ als Kurvenintegral eindeutig wird, muß man Wege benutzen, die auf der RIEMANNschen Fläche der Funktion $w = \sqrt{p(z)}$ liegen. Auf dieser RIEMANNschen Fläche ist $w = \sqrt{p(z)}$ eindeutig. Damit wird auch der Intgrand eindeutig.
  Wie das berühmte RIEMÄNNSCHE erkannte, wird das *globale* Verhalten elliptischer Integrale durch die Topologie der zugehörigen RIEMANNschen Fläche bestimmt.

- Die WEIERSTRASSsche Funktion $\wp$ besitzt ein *algebraisches Additionstheorem.*
  Der tiefere Grund für das Bestehen des Additionstheorems der WEIERSTRASSsche Funktion $\wp$ ist die Gruppenstruktur elliptischer Kurven.

- Um die Weierstrasssche Funktion $\wp$ zur Berechnung beliebiger elliptischer Integrale einsetzen zu können, muß man das **Umkehrproblem** für die $\wp$-Funktion lösen: die Berechnung des Periodengitters aus gewissen vorgegebenen Größen der Weierstrasssche Funktion $\wp$. Das führt auf die Theorie der Modulformen.

19.1.3 Das berühmte Jacobische Umkehrproblem für hyperelliptisches Integrale

Das berühmte Jacobische Umkehrproblem für hyperelliptisches Integrale besteht in der Frage nach der Richtigkeit einer Vermutung Jacobis aus dem Jahre 1832. Es ist weniger berühmt als die weltberühmten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, aber berühmter als der zwar nicht nur, aber doch vor allem in Bonn berühmte Werner Raab; Jacobis bemerkenswerte Vermutung war die folgende:
Es sei $w = p(z)$ ein Polynom 6. Grades, das keine mehrfachen Nullstellen besitzt. Wir betrachten die Beiden Funktionen $u = u(a, b)$ und $v = v(a, b)$, die sich durch Lösung des Systems

$$\int_{u_0}^{u} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} + \int_{v_0}^{v} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = a \quad \text{und} \quad \int_{u_1}^{u} \frac{zdz}{\sqrt{p(z)}} + \int_{v_1}^{v} \frac{zdz}{\sqrt{p(z)}} = b$$

bei fest vorgegebenen $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \mathbb{C}$ ergeben.
Dann sind die beiden Funktionen $u + v$ und $u \cdot v$ eindeutig und besitzen vier verschiedene Perioden.
Riemann und Weierstrass scheuten weder Mühen noch Integrale (obwohl sie mehr mehr als nur stumpfe Integralhansis waren) und lösten das Problem. Statt Hammer und Schraubstock benutzten sie Abelsche Integrale, um auf dem harten und steinigen Weg dieses wohl auch für seine Härte und Steinigkeit berühmten Problems zum Ziel zu gelangen.

19.1.4 Automorphe Funktionen

An die Stelle der elliptischen Funktionen treten bei allgemeinen Abelschen Integralen die automorphen Funktionen. Automorphen Funktionen sind meromorphe Funktionen in einem Gebiet, die gegenüber einer diskreten Untergruppe der automorphen Gruppe $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ invariant sind. Die Bedeutung automorphe Funktionen bei der Berechnung ABELscher Integrale beruht darauf, daß daß es zu jeder kompakten RIEMANNschen Fläche $\mathcal{R}$ vom Geschlecht $g \geq 2$ eine automorphe Abbildung $p : \mathbb{E} \to \mathcal{R}$ gibt, die den offenen Einheitskreis $\mathbb{E}$ auf $\mathcal{R}$ abbildet und die invariant ist unter der Gruppe der *Decktransformationen* von $\mathbb{E}$.

Nun ist genug Verwirrung gestiftet, und wir überlassen den geneigten Leser für den Moment sich selbst.

Geschichtliche Belehrung. Bedeutende Elliptiker sind neben dem oben erwähnten Karl Weierstrass vor allem der Norweger Niels Hendrik Abel (1802 - 1829), der sich sein mathematisches Wissen als Autodidakt aneignete. Abel (oder Nabel, wie ihn seine Freund nannten) bewies die Unmöglichkeit, Gleichungen 5. Grades durch Radikale zu lösen. Bekannt sind auch der Abelsche Konvergenzsatz, der Abelsche Stetigkeitssatz und das Abelsche Theorem (eine Verallgemeinerung einfacher elliptischer Integrale). Erst Abel kam zu der Überzeugung, daß es neben einfach periodischen auch doppelt periodische Funktionen geben müsse. Diese gewann er durch Umkehrung elliptischer Integrale. Abel zeigte, daß elliptische Funktionen als quotienten unendlicher Produkte darstellbar sind.
Hinsichtlich der Theorie der elliptischen Funktionen befand sich Abel im Wettstreit mit seinem berühmten Zeitgenossen
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851), der unabhängig von Abel die Theorie der elliptischen Funktionen schuf. In seiner Arbeit *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* werden die Jacobischen Grundfunktionen des komplexen Arguments u sin am u, cos am u und Δ am u als Quotienten sogenannter Theta-Funktionen erklärt und die er als ganze Funktionen durch unendliche Reihen definiert. Die Bezeichnung sin am u bedeutet „sinus amplidudinis“ und erklärt sich aus der Umkehrung des elliptischen Integrals

$$u(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 (\sin\varphi)^2}},$$

durch die „Amplitude “ am $u = \varphi = \varphi(u)$; hieraus ergibt sich $x = \sin\varphi =$ sin am u.
Schließlich ist noch Ferdinand Eisenstein (1823 - 1852) zu nennen. Auf ihn gehen die Eisenstein-Reihen zurück. Wie Nabel und Riemännsche gelang ihm ein tuberkulöses Ende.

19.2 Was es ist

Definition: Wenn w_1 und w_2 komplexe Zahlen sind, deren Gerade (in der komplexen Ebene) nicht durch den Nullpunkt verläuft, dann heißt die Menge:

$$W = \{w = m_1 w_1 + m_2 w_2 : m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

das von w_1 und w_2 erzeugte Periodengitter. $W \backslash \{0\}$ wird mit W' bezeichnet.

Definition: Eine mereomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **elliptisch**, wenn sie wenn sie die Punkte eines Gitters als Periode hat.

Satz 1:
Jede ganze elliptische Funktion ist konstant.
Beweis: Satz von Liouville.

19.3 Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Definition: Es sei

$$\wp'(z) = -\sum_{w \in W} \frac{2}{(z-w)^3}.$$

Satz 2:
Die Funktion $\wp'$ konvergiert in jeder kompakten Untermenge K von $\mathbb{C} \backslash W$, ist also dort holomorph.
Zudem ist $\wp'$ periodisch.
Beweis: (i) $\sum\limits_{w \in W'} \frac{1}{|z-w|^3} = \sum\limits_{w \in W'} \frac{1}{1-|z/w|^3} \frac{1}{|w|^3} \leq \frac{1}{M} \sum\limits_{w \in W'} \frac{1}{|w|^3}$,
wenn $M = \min\{|1 - z/w| : z \in K, w \in W\}$.
(ii) $\wp'(z-v) = -\sum\limits_{w \in W} \frac{2}{z-v-w} = -\sum\limits_{u \in v+W} \frac{2}{z-u} = \wp'(z)$, falls $v \in W$.

Definition: Die Funktion

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in W'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}$$

wird die Weierstrass**sche $\wp$-Funktion** genannt.

Satz 3:
Die Weierstrasssche $\wp$-Funktion ist eine Stammfunktion von $\wp'$.
Beweis: $\int\limits_0^z \left(\wp'(t) + \frac{2}{t^3}\right) dt = \int\limits_0^z \left(-\sum\limits_{w \in W} \frac{2}{(t-w)^3} + \frac{2}{t^3}\right) dt = -2 \int\limits_0^z \left(\sum\limits_{w \in W'} \frac{1}{(t-w)^3}\right) dt = -2 \sum\limits_{w \in W'} \int\limits_0^z \left(\frac{1}{(t-w)^3}\right) dt = -2 \sum\limits_{w \in W'} \left(\frac{1}{-2} \frac{1}{(t-w)^2}\right) \Big|_0^z = \sum\limits_{w \in W'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{z^2} = \wp(z) - \frac{1}{z^2}$.

Satz 4:
Die Funktion $\wp$ genügt der Differentialgleichung:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

mit den Invarianten $g_2 = 60G_4$ und $g_3 = 140G_6$.

Theorem 1 (Additionstheorem der $\wp$-Funktion):

$$\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) + \wp'(z_2)}{\wp(z_1) + \wp(z_2)}\right)^2$$

Nun, so oder so ähnlich könnte man zwar noch ewig weitermachen, aber irgendwann muß Schluß sein.

Tschüß.